

Räcker kunskaperna i matematik?

Bedömningsgruppen för
studenternas förkunskaper
i matematik

Räcker kunskaperna i matematik?

ISBN: 91-88874-20-6

Innehåll: Bedömningsgruppen för studenternas förkunskaper i matematik

Tryck: Höskoleverket februari 1999

Missiv

Till Högskoleverket

Högskoleverket fick 1998-03-19 i uppdrag av Regeringen att efter samråd med Statens skolverk utreda och analysera de krav på förkunskaper i matematik som ställs inför högskolestudier i matematik. Uppdraget skulle ge ett underlag för bedömning om det behöver vidtas några åtgärder för att underlätta övergången mellan gymnasieskola och högskola vad avser matematik.

Med anledning av regeringens uppdrag tillsatte högskoleverket en bedömningsgrupp bestående av Professor Torbjörn Hedberg, Luleå tekniska universitet, ordförande; adjunkt Laila Backlund, Fyrisskolan, Uppsala; lektor Lars-Eric Björk, Sunnerboskolan, Ljungby; universitetslektor Gerd Brandell, Luleå tekniska universitet; lärarkandidat Lasse Erlandsson, Lärarhögskolan i Stockholm; fil. stud. Eva Gunnarsson, Lunds Universitet; Teknolog Erik Lindgren, Chalmers tekniska högskola; universitetslektor Rolf Pettersson, Chalmers tekniska högskola; adjunkt Kjell Tormod, Nacka Gymnasium och universitetslektor Johan Tysk, Uppsala universitet.

Gruppens sekreterare har varit universitetslektor Lars Brandell, Högskoleverket. Carina Mood-Roman har arbetat inom sekretariatet med bearbetning och analys av förkunskapsprov i matematik från olika universitet och högskolor.:

Bedömningsgruppen har tidigare i en skrivelse (1998-12-29) till Högskoleverket gett sina synpunkter på det preliminära förslag till organisationsförändring i gymnasieskolan som Statens Skolverket publicerade 1998-11-25.

Inom ramen för sitt uppdrag har bedömningsgruppen anordnat hearings på tre orter med lärare från gymnasieskola och högskola samt studenter från olika universitet och högskolor. Gruppen har också haft överläggningar med företrädare för NyIng-projektet.

Bedömningsgruppen får härmed avge sin slutrapport: *Räcker kunskaperna i matematik?*

I och med denna rapport har bedömningsgruppen avslutat sitt arbete.

Stockholm den 11 februari 1999.

Torbjörn Hedberg

Laila Backlund

Lars-Eric Björk

Gerd Brandell

Lasse Erlandsson

Eva Gunnarsson

Erik Lindgren

Rolf Pettersson

Kjell Tormod

Johan Tysk

/ Lars Brandell

Innehållsförteckning

Missiv	3
Till Högskoleverket	3
1. Inledning	9
Uppdraget	9
Arbetsätt	9
Rapportens uppläggning	10
2. Sammanfattning av bedömningsgruppens slutsatser och förslag	11
Om förkunskaperna	11
Om situationen i gymnasieskolan och i högskolan	11
Grunden för ett handlingsprogram	12
Två grundprinciper	12
Anpassning till elevernas/studenternas förutsättningar	13
Lärarna och lärarrollen	13
Utbildningen av lärare i matematik	14
Fortbildning och vidareutbildning av dem som undervisar i matematik	14
Samverkan mellan lärare i gymnasieskolor och högskolor	14
Matematikens roll i gymnasieskolan	14
Matematiken på högskolan	15
Forskning i matematikdidaktik	15
Viktiga yttre faktorer	15
Utvärdering av matematikutbildningen	16
3. Matematik och matematikkunskaper	17
Matematik är viktigt att kunna för alla	17
Vad är matematik?	17
<i>Matematik är inte en naturvetenskap</i>	18
<i>Matematik som hjälpvetenskap</i>	19
<i>Matematik som "exakt vetenskap"</i>	19
Kraven från individ och samhälle på matematikkunskaper kommer att öka	20
4. Matematikutbildning i Sverige idag	21
Förskolan	21
Grundskolan	21
Gymnasieskolan	21
Komvux	22
Högskoleutbildning i matematik	22
<i>Civilingenjörsutbildning</i>	22
<i>Högskoleingenjörsutbildning</i>	23
<i>Matematisk-naturvetenskapliga utbildningar</i>	23
<i>Lärarytelseutbildningar</i>	23
5. Mål och metoder för matematikundervisningen	25
Matematik är ett ämne med egen metodik och didaktik	25
Matematikinläring är en lång process	25
Syfte och mål	26
Teori, metodkunskap och tillämpningar	26

Vad kommer först?	27
De olika utbildningsmomenten bygger på varandra	28
”Matematisk mognad”	28
6. Förkunskaper i matematik bland högskolestudenter	31
Frågeställningar	31
Har förkunskaperna förändrats?	31
Vad kan de nyblivna matematikstudenterna idag?	33
<i>Några exempel på lösningsfrekvenser på enskilda uppgifter i Umeå-testet</i>	35
Vilken betydelse har förkunskaperna från gymnasieskolan för studieresultaten?	37
7. Annat underlag för bedömningsgruppens arbete	39
Hearings med lärare från gymnasieskolor och högskolor/universitet och studenter	39
<i>Situationen i gymnasieskolan</i>	40
Förkunskaperna från grundskolan.	40
Kursstrukturen i gymnasieskolan.	40
Stoffträngsel	41
Matematikens ställning i gymnasieskolan	41
<i>Antagningsreglerna</i>	41
<i>Fortbildningssituationen</i>	41
<i>Läroplanen</i>	41
<i>Högskolesituationen</i>	42
<i>Övrigt</i>	42
Högskoleutbildningen i matematik	42
<i>1995 års utvärdering</i>	42
<i>En förfrågan till universitet och högskolor</i>	44
<i>En kartläggning av utvecklingsprojekt för civilingenjörs och ingenjörsutbildningar</i>	44
8. Situationen i andra länder	47
Ett universellt problem	47
Svenska elevers matematikkunskaper i en internationell jämförelse	49
9. Lägesbeskrivning	51
Vad kan och bör göras?	51
10. Människorna	53
Utbildning handlar om människor	53
Eleverna /studenterna	53
<i>Matematikutbildning för vem?</i>	53
<i>Öka intresset för matematikkunskaper och matematikstudier</i>	54
<i>Anpassning till elevernas/studenternas varierande förutsättningar</i>	54
<i>Variation av studietakten</i>	55
<i>Variation av kursinnehåll.</i>	56
<i>Elever med behov av särskilt stöd.</i>	56
<i>Uppföljning av elever/studenterna</i>	57
<i>Differentieringsfrågan</i>	57
Matematiklärarna	57
<i>Att undervisa i matematik är en professionell uppgift</i>	58
<i>Den ämnesmässiga identiteten</i>	58
<i>Läroplanen</i>	58

<i>Läroarutbildning</i>	59
<i>Läroarfortbildning</i>	60
<i>Samverkan mellan gymnasieskolor och högskolor/universitet</i>	61
Sammanfattning	61
11. De yttre ramarna för matematikutbildningen	63
Matematikens ställning i gymnasieskolan	63
Förslaget om gymnasieskolans framtida utveckling	63
<i>Inriktning mot matematik/data</i>	64
Gymnasieskolans kursprogram i matematik	65
<i>Kursen Matematik A</i>	67
<i>Kursen Matematik E</i>	68
<i>Matematikkurser med annat innehåll</i>	68
Utbildningsorganisation och kursplaner vid universitet och högskolor	69
<i>Överbrygningskurser</i>	69
<i>Kursutbudet i övrigt</i>	70
Urvalet till högre studier	70
<i>Betygen har en stor betydelse</i>	70
<i>Pröva andra urvalsmetoder</i>	71
Studiemedelsreglerna	72
Forskning och utvärdering	72
<i>Forskning i matematikdidaktik</i>	72
<i>Behovet av utvärdering</i>	72
Sammanfattning	73
Bilaga 1 Regeringens uppdrag till Högskoleverket	75
Bilaga 2 Johan Lithner. Matematikdidaktisk forskning relaterad till övergången gymnasieskola – högskola en översikt	83
Bilaga 3–9 kan erhållas från Högskoleverket.	

I. Inledning

Uppdraget

Upprinnelsen till denna rapport var alarmerande uppgifter under hösten 1997 om att förkunskaperna i matematik hos nybörjarna i civilingenjörsutbildningarna hade försämrats. Detta ledde så småningom fram till att Regeringen gav Högskoleverket i uppdrag att, efter samråd med Skolverket, bl.a. utreda och analysera

”Vilka innehållsliga och pedagogiska åtgärder inom såväl högskola som gymnasium som bedöms lämpliga för att underlätta övergången från gymnasieskolan till högskolans tekniska och naturvetenskapliga utbildningar vad avser ämnet matematik.”¹

I Högskoleverkets uppdrag till bedömningsgruppen anges att den speciellt skall

- bedöma om och i vilket avseende det råder bristande samstämmighet mellan de kunskaper i matematik som studenterna har med sig från gymnasieskolan och de krav som högskolestudierna ställer
- diskutera eventuella orsaker till denna bristande samstämmighet (i den mån den förekommer)
- ge förslag till olika åtgärder som kan förbättra situationen
- ge en utblick över hur motsvarande frågeställningar behandlas i andra länder”.

Arbetsätt

Det visar sig att uppdraget är omfattande. Ytterst berör det matematikens ställning överhuvudtaget inom skola och högskola. Den korta tid som vi haft till förfogande har inneburit begränsningar i det som har varit möjligt att genomföra.

Vi har i vårt arbete fått hjälp av institutioner och personer som genomfört olika undersökningar med anknytning till förkunskapssituationen. Vidare har universitetslektor Johan Lithner vid Matematiska Institutionen, Umeå Universitet gjort en översikt av den matematikdidaktiska forskningen relaterad till övergången mellan gymnasieskola och högskola (bilaga 2).

Mera konkret bygger vi våra ställningstaganden, utöver den erfarenhet som finns samlad i bedömningsgruppen, på flera typer av material. Ett underlag är undersökningar av resultaten från ett antal av de olika *förkunskapsprov* och *diagnostiska prov* som gjorts vid olika universitets- och högskoleinstitutioner. Vissa av dessa undersökningar har gjorts vid universitet och högskolor. I andra

¹ Hela texten i Regeringens uppdrag till Högskoleverket finns i bilaga 1.

fall har resultat som matematikinstitutionerna ställt till förfogande analyserats inom bedömningsgruppens kansli. I underlaget ingår också två studier av hur studieresultaten i matematik i olika högskoleutbildningar är relaterade till de studerandes förkunskaper så som de dokumenteras i gymnasiebetygen eller i resultaten på förkunskapsproven.

Ett annat underlag till våra förslag och ställningstaganden är de hearings som anordnades på tre orter (Stockholm, Lund och Umeå) under vecka tre 1999 med matematiklärare (både från universitet och högskolor), matematikstudera-nde och andra intresserade. Dessutom har bedömningsgruppen haft kontak-ter med företrädare för NyIng-projektet i Linköping.

Annat material som vi använt är, förutom olika uppföljnings- och utvärderingsrapporter som gjort av Skolverket, den rapport som universitetslektor Bengt Johansson tidigare gjort på uppdrag av Skolverket².

Rapportens uppläggning

Dispositionen av rapporten är enligt följande.

I kapitel 2 sammanfattas bedömningsgruppens slutsatser och förslag.

Som en bakgrund till den fortsatta framställningen diskuteras i kapitel 3 ämnet matematik och den roll som kunskaper i matematik spelar i det svenska samhället. Kapitel 4 innehåller en översikt av omfattningen av matematik-utbildningen i skola och högskola i dagens Sverige. I kapitel 5 behandlas några viktiga förutsättningar som vi menar gäller för undervisning och utbildning i matematik oavsett stadium eller nivå.

Kapitel 6 innehåller en sammanfattning av de slutsatser som följer av resultaten på de olika *förkunskapstest* som analyserats. Kapitel 7 innehåller annat material, mest av kvalitativ karaktär, som hör till underlaget för bedömnings-gruppens ställningstaganden. Där redovisas bl.a. de synpunkter som kom fram i de hearings som gjordes under januari 1999.

Kapitel 8 ger en internationell utblick och jämför situationen i Sverige med den i andra länder.

I kapitel 9 ges en uppsummering av hur vi ser på situationen idag. Slutsatsen är att man inte kan slå sig till ro med den nuvarande situationen. Det behövs en kontinuerlig förnyelse och förbättringsprocess för att skola och högskola skall kunna hålla jämna steg med de ökande kraven på kunskaper i matematik.

Förslag till konkreta åtgärder ges i kapitel 10 där utgångspunkten är situationen för dem som är direkt berörda nämligen elever/studenter och lärare, och i kapitel 11 som behandlar de *yttre ramar* som på olika sätt styr verksamheten – i många fall på ett negativt sätt.

² Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket, Stockholm 1998.

2. Sammanfattning av bedömningsgruppens slutsatser och förslag

Om förkunskaperna

Ursprunget till bedömningsgruppens uppdrag var rapporter om att förkunskaperna i matematik hos nybörjarna på civilingenjörsutbildningarna under de senaste åren hade blivit sämre. Dessa uppgifter baserades inte bara på resultat från de förkunskapstest som under många år hade gjorts med nybörjarna på olika tekniska högskolor utan också på vittnesbörd från erfarna högskole- och gymnasielärare.

Vår slutsats är också att teknologernas förkunskaper inom de områden som provas i de aktuella testen under en 10–15-års period har blivit sämre i genomsnitt.

Utöver detta har vi analyserat test som mäter ett vidare spektrum av matematikkunskaper och som även gjorts av studenter som läser på andra utbildningar än civilingenjörsutbildningen.

Det finns stora variationer i förkunskaperna hos dem som börjar högskolestudier inom naturvetenskap och teknik. Det är skillnader mellan olika typer av utbildningar, men det finns också stora variationer mellan studenterna på samma utbildning. Detta gäller både räknefärdigheten i snäv mening, och det som vi i denna rapport har kallat matematisk mognad.

Mycket tyder på att åtskilliga studenter har så svaga förkunskaper att det kan bli svårt för dem att tillgodogöra sig den undervisning i matematik som ges vid universitet och högskolor så som den ser ut idag.

Mycket talar för att de problem som beskrivs ovan inte är unika för Sverige. Liknande signaler kommer från andra jämförbara länder. Bristerna i förkunskaper hos de svenska eleverna kan därför inte förklaras enbart med specifikt svenska förhållanden.

Om situationen i gymnasieskolan och i högskolan

Vi har inte gjort någon systematisk granskning av undervisningen och dess organisation vare sig i gymnasieskolorna eller vid högskolorna. Det har inte heller varit vår uppgift. Vi har dock kunnat konstatera att det finns mycket som är positivt i dagens matematikundervisning i Sverige. Men det finns också mindre starka sidor:

I *gymnasieskolan* finns det en rad ”systemfel” som påverkar undervisningen i matematik och dess resultat. Det finns exempel på hur man på olika sätt har försökt komma tillrätta med problemen, men också tecken på en frustration hos matematiklärare mot bakgrund av de ramar som gäller för deras verksamhet.

Inom *universitet och högskolor* pågår å ena sidan ett mycket omfattande försöks- och utvecklingsarbete, men å andra sidan drivs huvuddelen av matematikundervisningen vid våra universitet och högskolor fortfarande på ett traditionellt sätt med ett stort utrymme för framtida förbättring.

Grunden för ett handlingsprogram

Behovet av kunskaper i matematik kommer att bli större i framtiden än de är idag. Det finns för de närmaste åren planer på att bygga ut högskoleutbildningen inom naturvetenskap och teknik med ytterligare ca 5 000 nybörjarplatser. Till detta kommer att den allmänna samhällsutvecklingen innebär att behovet av matematikkunskaper kan väntas öka för alla människor.

Vår bedömning är att det finns förutsättningar för att förbättra utbildningen i matematik i landet. Detta är också nödvändigt mot bakgrund av de ökande kraven på matematikkunskaper i samhället.

Det finns inte någon enskild förändring som i ett slag skulle kunna förbättra situationen. Det behövs istället ett helt paket med åtgärder på olika nivåer i systemet.

Man kan inte utgå från att den "vanliga" matematikundervisningen i fortsättningen skulle kunna fungera ungefär som idag och att det bara behövs speciella åtgärder för dem som skall fortsätta med studier i naturvetenskap, teknik och liknande ämnen. Vi menar att grunden för en del av dagens problem i övergången mellan gymnasieskola och högskola står att finna i matematikutbildningen längre ner i skolsystemet.

Goda matematikkunskaper, både när det gäller färdigheter och när det gäller förståelse kräver lång tid och aktiva insatser från elever och studenter.

Ett förändringsarbete måste innehålla både mer kortsiktiga åtgärder för att lösa vissa akuta problemen, och en mer långsiktig strategi för att få en igång en utveckling som kan möta de ökade kraven på matematikkunskaper i framtiden.

I denna rapport föreslås en rad olika åtgärder som tillsammans skulle kunna ge en bättre utveckling. Det är åtgärder som kräver engagemang från många olika nivåer. Det gäller matematiklärarna (både i skolan och i högskolan); det gäller naturligtvis också studenter och elever; det gäller vidare skolledningarna och skolhuvudmännen inom skolektorn *och* institutioner, fakulteter och högskoleledningar inom högskoleområdet. Det gäller också de centrala myndigheterna liksom regering och riksdag. Möjligheten till framgång för ett förändringsprogram beror bl.a. på om alla dessa aktörer kan fås att dra åt samma håll.

Två grundprinciper

Två grundläggande principer för våra förslag om den framtida utvecklingen av matematikämnet i såväl skola som högskola är att

- alla grupper av studerande skall få möjligheter att, inom ramen för rimliga arbetsinsatser, lära sig mera matematik än idag.
- matematik och matematikutbildning bör upplevas som intressant och stimulerande av alla elever/studententer.

Anpassning till elevernas/studenternas förutsättningar

Inom alla skolformer (grundskola, gymnasieskola och högskola) bör utbildningen i större utsträckning än nu organiseras så att eleverna/studenterna kan studera i en takt som passar till deras individuella förutsättningar.

Det kan bl.a. innebära att även de som tidigare läst på NV-programmet, men som har otillräckliga förkunskaper, skall kunna få rätt att gå en introduktionstermin eller en på annat sätt anpassad studiegång inom högskolan, innan de börjar reguljära högskolestudier inom teknik eller naturvetenskap.

Det kan också innebära att det mer än nu, både i skolan och i högskolan, ges alternativa kurser i matematik anpassade efter elevens/studentens intresse och förutsättningar.

Vi ansluter oss till Bengt Johanssons³ förslag att

”frågan om matematikundervisningens organisation och differentiering (skall bli) föremål för ett allsidigt forsknings och utvecklingsprojekt, som sträcker sig från förskola till högskola och där undervisningens mål, innehåll och form beskrivs och analyseras i relation till den prov- och utvärderingskultur som är så typisk för matematikutbildning.”

Vi menar också att den viktiga pedagogiska uppgiften att stödja de elever i skolan som riskerar att inte blir godkända i matematik inte får innebära att man bortser från andra elevers situation. Inte bara elever med svårigheter i matematik är i behov av särskilda åtgärder. Alla elever bör få en undervisning som svarar mot deras förutsättningar.

Lärarna och lärarrollen

Matematik är ett särskilt ämne med egna didaktiska problem och metoder. Matematiklärarna vid en skola eller högskola måste därför kunna få fungera som grupp inom skolan eller högskolan, utan att därför isolera sig från övriga lärargrupper. Det är också angeläget att det på varje skola finns en eller flera lärare som ser som sin primära uppgift att vara lärare i matematik. Gymnasieskolan bör också enligt vår mening pröva att ha ettämneslärare i matematik.

Det bör också finnas lärare (lektorer) i gymnasieskolan med erfarenhet av forskning i matematik eller matematikdidaktik.

³ Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket, Stockholm 1998.

Utbildningen av lärare i matematik

I den nya lärarutbildningen bör blivande grundskollärare i matematik få lära sig mera matematik och mera matematikdidaktik än man gör idag.

För alla lärare som kan komma att undervisa i matematik i framtiden (även om de inte formellt skall bli matematiklärare) måste det i lärarutbildningen ingå både studier i matematikdidaktik och ämneskurser i matematik.

Den ämnesteoretiska utbildningen för gymnasielärare i matematik är internationellt sett kort. Därför bör man sträva efter att gymnasielärarna i matematik ska få en lika gedigen utbildning som i övriga nordiska länder. Vi menar också att en mer organiserad utbildning av gymnasielektorer i matematik bör införas.

Fortbildning och vidareutbildning av dem som undervisar i matematik

Möjligheterna till ämnesmässig fördjupning och matematikdidaktisk fortbildning måste bli bättre än de är idag. Detta bör inte bara gälla för de lärare som formellt är "matematiklärare" utan kanske i ännu högre grad alla dem som med en annan basutbildning också undervisar i matematik.

Det är också viktigt att alla högskolelärare ges möjligheter till matematikdidaktisk utbildning och fortbildning.

Samverkan mellan lärare i gymnasieskolor och högskolor

Det samarbete och den samverkan mellan lärare i högskola och i gymnasieskola som i dag finns på olika håll bör byggas ut till hela landet. Man bör också skapa ett system där högskolelärare i matematik besöker gymnasieskolor och där gymnasielärare besöker högskolor, i båda fallen för att auskultera och diskutera matematikundervisningen.

Matematikens roll i gymnasieskolan

Vi anser att matematikens ställning i gymnasieskolan bör stärkas och inte försvagas. Det betyder att kursen Ma D bör vara obligatorisk på NV-programmet och Ma C obligatorisk på vissa inriktningar i SP-programmet även i fortsättningen (förutsatt den organisatoriska lösning som valts i Skolverkets förslag till ny utformning av gymnasieskolan). Vi föreslår också att Matematik D blir obligatorisk på det nya Teknikprogrammet.

Vi föreslår också att det skall finnas en matematik/data-inriktning i gymnasieskolan. Den skall inte bara vara reserverad för dem som går Naturvetenskapsprogrammet eller Teknikprogrammet. En matematik/data-inriktning bör också vara en profileringsmöjlighet för dem som går Samhällsvetenskapsprogrammet.

Fördelningen av poängtalet på matematikkurserna på NV- och SP-programmen samt på det nya Teknikprogrammet måste motsvara fördelningen av

den arbetsinsats som kurserna kräver av eleverna. De resurser som avsätts i form av lärartid och elevtid bör motsvara poängtalet.

Vi anser också att den för alla program gemensamma kursen i matematik (Ma A) bör ersättas av programspecifika kurser. Samtidigt skapas tilläggskurser för den som inte gått NV- SP- eller Teknikprogrammet men vill komplettera matematikkunskaperna till samma nivå som nuvarande Matematik B, C, D eller E.

Skolverket bör se över innehåll och utformning av kurs Ma E i nära samråd med högskolorna, bl.a. för att se om den kan ges ett innehåll som utvecklar det som vi i denna rapport kallar matematisk mognad och utgöra en syntes av tidigare matematikkurser i gymnasieskolan.

Man bör också successivt pröva införandet matematikkurser med delvis annat innehåll än de nuvarande. Som ett första steg bör en kurs i diskret matematik införas i första hand för den föreslagna inriktningen mot matematik data-området.

Matematiken på högskolan

På många högskoleutbildningar finns studenter med mycket varierande förkunskapsnivå. Högskolorna bör överväga att differentiera studenterna inom ett och samma utbildningsalternativ på grupper i olika studietakt eller med olika undervisningsinsats. Utformningen och innehållet i de grundläggande kurserna i matematik på olika högskoleutbildningar bör också ses över.

Arbetet med att följa upp och analysera studieresultaten för de studenter som institutionen har haft bör förbättras.

Forskning i matematikdidaktik

Den matematikdidaktiska forskningen i Sverige bör utvecklas så att vi kommer minst i nivå med situationen i andra nordiska länder.

Viktiga yttre faktorer

Reglerna för att räkna poäng vid urvalet till högre studier har effekter i gymnasieskolan. De försämrar kraftigt möjligheterna till en bra och effektiv matematikundervisning. Därför bör varje matematikkurs som den sökande läst ges en vikt (vid denna poängberäkning) som svarar mot dels den betydelse kursen har för den utbildning man söker dels kursens svårighetsgrad.

På lång sikt bör högskolorna få pröva andra urvalsmetoder till sina utbildningar, antingen som ett komplement till eller som en ersättning för de nuvarande metoderna (betyg och högskoleprov).

Reglerna för att erhålla studiemedel måste utformas så att de inte hindrar studenter med otillräckliga förkunskaper att följa en långsammare studietakt.

Utvärdering av matematikutbildningen

De nationella proven i matematik bör utvecklas, så att de kan ge ett bättre underlag för en utvärdering av matematiken i gymnasieskolan.

1994/95 genomfördes på Universitetskanslerns initiativ en utvärdering av den grundläggande utbildningen i matematik vid svenska universitet och högskolor. (Universitetskanslern 1995). I utvärderingen engagerades en extern expertgrupp till stor del bestående av utländska matematiker och matematikdidaktiker. Vi föreslår att en liknande extern utvärdering görs av matematikundervisningen i den svenska skolan (både grundskola och gymnasieskola).

3. Matematik och matematikkunskaper

Matematik är viktigt att kunna för alla

De flesta i vårt land är ense om att det är bra för att inte säga nödvändigt att kunna matematik. Matematik uppfattas, vid sidan av svenska språket, som det viktigaste ämnet i skolan.

Trots detta uttrycks ibland en skepsis till ämnet, framförallt till det som man uppfattar som mer avancerade kunskaper i ämnet: *”Det är bara till för specialisterna, naturvetarna, ingenjörerna. Matematik utöver det som man behöver i det vanliga livet är ingenting för gemene man.”*

Vi vill inte göra en bedömning av hur vanlig den senare uppfattningen är idag. Men vi håller inte med utan menar istället att goda kunskaper i matematik, (även kunskaper i ”avancerad” matematik) kan vara av värde för de allra flesta i vårt land och kan också bidra till att göra deras tillvaro bättre.

Vi tror att denna skepsis mot matematik, i den mån den finns, både kan bero på tidigare negativa erfarenheter av matematikundervisning och på att det finns en oklar bild av vad matematik är och vad matematikkunskaper kan användas till.

Vad är matematik?

Det finns många sätt att definiera ämnet matematik som vetenskap och som skolämne. Nationalencyklopedin definierar matematik som

”en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling”

I den nu gällande läroplanen för gymnasieskolan gör man under rubriken karaktär och struktur följande beskrivning

”Matematik är ett sätt att undersöka och strukturera teoretiska och praktiska problem. Matematik är också ett sätt att tänka med inslag av både intuition och logik. Matematik handlar om att kunna formulera hypoteser, undersöka dem och dra slutsatser samt att kunna övertyga andra om giltigheten i ett resonemang. I den matematiska bevisföringen preciseras några få egenskaper som är intuitivt naturliga och utifrån dessa härleds sedan andra egenskaper och samband.

Matematik är också ett språk som genom sina symboler gör det möjligt att kort och precist uttrycka och logiskt bearbeta komplicerade idéer och påståenden.”

Läroplanen för grundskolan innehåller liknande formuleringar men betonar också att

”Matematik är en levande mänsklig konstruktion och en kreativ och undersökande aktivitet som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition.”

I ett något vidare perspektiv kan man säga att matematik ytterst är ett medel för den enskilde att beskriva och analysera omvärlden och sin egen situation. Det betyder att förmågan att använda matematik är av samma karaktär som förmågan att använda det egna språket.

Matematik kan användas för att planera och för att studera och analysera samband i omvärlden, både i den av människor skapade omvärlden och i den natur som omger oss. Detta gäller för den enskilde i hans/hennes liv, men det gäller också för olika organisationer och strukturer i de samhällen som människor har bildat. Matematik har använts i alla samhällen och i alla kulturer. Men ju mer utvecklat samhället är desto svårare är det både för den enskilde och för organisationer, företag etc. att klara sig utan tillgång till matematikkunskaper.

Det är en viktig utmaning för det svenska utbildningsväsendet och dess lärare att bidra till att så många människor som möjligt i vårt land kan få de matematikkunskaper som de kan behöva i sitt framtida liv.

Men värdet av matematiken ligger inte enbart i den rent operativa nyttan. Matematik har också ett egenvärde som en intellektuell konstruktion med en emotionell anknytning och som en viktig del av vår kultur. Skolan bör ha som mål att också låta eleverna få känna den glädje och stimulans som ges av att kunna lösa ett matematiskt problem på gränsen till den egna förmågan eller kunna tränga in i ett abstrakt matematiskt resonemang.

Matematik är inte en naturvetenskap

Matematik är ett viktigt hjälpmedel för teknik och för ämnen som fysik eller kemi; matematik *är däremot inte* en naturvetenskap. Det förekommer dock ibland, inte minst i utbildningssammanhang (både i anslutning till gymnasial utbildning och till högskoleutbildning), att matematik snarast betraktas som en komplettering till naturvetenskapen. Men matematik har en annan vetenskaplig bas än teknik och naturvetenskap.

I de naturvetenskapliga ämnena är ambitionen att beskriva och studera företeelser i vår fysiska tillvaro. Detta sker genom att man skapar *teorier* vars sanning och förklaringsvärde visas genom experiment. Det betyder att en naturvetenskaplig princip eller sats (t ex Newtons gravitationslag) inte kan *bevisas* vara sann. Experimenten gör den visserligen mer eller mindre trolig, men det finns alltid en tänkbar möjlighet att det kan finnas situationer då en teori inte gäller och att det finns experiment vars resultat strider mot dess förutsägelser.

Matematik däremot är en alltigenom mänsklig tankebyggnad som handlar om hur man utgående från ett litet antal förutsättningar, s k postulat, kan *bevisa* (eller beräkna) att olika påståenden är sanna.

Pythagoras sats säger exempelvis att om vissa villkor är uppfyllda så gäller för varje rätvinklig triangel att summan av kvadraterna av längden på de två kortare sidorna (kateterna) är lika med kvadraten på längden av den tredje sidan (hypotenusan). Detta resultat är sant för alla rätvinkliga trianglar. Man vet alltså

att hur man än konstruerar sin rätvinkliga triangel så gäller den angivna relationen mellan triangelns sidor.

Ett "fysikaliskt bevis" för Pythagoras sats skulle istället kunna vara att man ritar ett stort antal rätvinkliga trianglar, mäter deras sidor och verifierar att formeln stämmer. Det är naturligtvis inte fel att göra en sådan ansats även i matematikundervisningen, men den måste följas upp så att eleverna blir medvetna om att det går att matematiskt *bevisa* att sambandet i Pythagoras sats gäller för alla rätvinkliga trianglar.

Matematik som hjälpvetenskap

Att matematik är ett av de viktigaste ämnena i skolan beror bl.a. som redan nämnts på att matematikkunskaper är viktiga i många situationer i människornas vardag. Men matematik är också viktigt som hjälpmedel till ett stort antal andra vetenskaper. Det gäller naturligtvis, som redan nämnts fysik och kemi och alla andra naturvetenskapliga ämnen samt teknik, men också många andra ämnen t. ex. medicin, ekonomi, statistik, språkvetenskap etc.⁴

Matematik som "exakt vetenskap"

Karakteristiskt för matematiken är att det, till skillnad från situationen i många andra ämnen, går att avgöra och komma överens om huruvida ett resonemang är riktigt eller felaktigt utifrån givna villkor. Det kan däremot råda stor oenighet om en viss metod är att föredra framför en annan, om hur ett problem ska formuleras och om hur ett visst resultat ska tolkas. Men åtminstone i teorin kan man själv avgöra om man förmår eller inte förmår lösa en uppgift eller ett problem. Detta kan ses som en trygghet för var och en som skall använda sina matematiska kunskaper – under förutsättning att man vet vad man kan och vad man inte kan. Ofta gäller dock inte detta. Då blir resultatet snarast frustration och osäkerhet, och i värsta fall ett avståndstagande från ämnet överhuvudtaget.⁵

Ett annat förhållande ägnat att skapa förvirring för den som skall studera matematik är en rad konventioner för hur man kan uttrycka sig i matematisk text. Här finns det också variationer mellan olika framställningar och olika skolor. Det mest påtagliga exemplet är användningen av uttrycket "härav inses lätt", som ofta innebär att man i en härledning inte velat skriva ut ett antal led, som författaren uppfattar som självklara. Detta gäller dock inte alltid för läsaren. Ännu svårare blir det för den matematikstuderande när han eller hon själv förväntas formulera ett matematiskt resonemang t.ex. en härledning eller ett bevis. Vad som är "tillåtet" respektive "ej tillåtet" för att texten skall anses vara korrekt är långt ifrån självklart. Vissa mer eller mindre uttalade konventioner skall följas och den studerandes omdöme och erfarenhet sätts på prov.

⁴ Vi har också under arbetets gång fått signaler från humanistiska och samhällsvetenskapliga ämnen om att även där finns problem med bristande förkunskaper i matematik.

⁵ För fullständighetens skull bör man kanske påpeka att det inte är helt korrekt att påstå att man alltid i princip kan avgöra om ett påstående är sant eller falskt. Det finns, enligt Gödel, i varje tillräckligt komplext matematiskt axiomsystem minst ett påstående som inte är avgörbart.

Kraven från individ och samhälle på matematikkunskaper kommer att öka

Sedan lång tid tillbaka har kravet på kunskaper i matematik varit växande. Denna trend kommer att fortsätta. Mera konkret kommer en ökande andel av befolkningen att gå på högskoleutbildningar innehållande kurser i matematik. Även många andra kommer att i sin högskoleutbildning behöva goda förkunskaper i matematik från gymnasieskolan. Samhällsutvecklingen kommer också att innebära ökade krav på kunskaper i matematik för alla medborgare. Den ökande datoriseringen kan i och för sig betyda att vissa traditionella delar av matematikundervisningen kan tonas ner (detta gäller både på gymnasieskole- och på högskolenivå). Men datoriseringen innebär också ökande krav på matematikkunskaper. Det behövs en större *matematisk förståelse* inom traditionella matematikområden för att kunna använda datorerna på ett tillförlitligt sätt. Datorerna ger vidare möjligheter att på olika nivåer matematiskt behandla problem och uppgifter som man tidigare har tacklat med andra metoder eller helt enkelt har avstått från att behandla. Detta kräver också ökade och delvis annorlunda kunskaper i matematik. Det gäller inte bara framtidens ”specialister” utan i princip bör alla svenskar i framtiden ha möjlighet att lära sig mera matematik än idag. Kraven på fortbildning och vidareutbildning inom olika matematiska områden för dem som lämnat utbildningssystemet kommer också att öka.

4. Matematikutbildning i Sverige idag

Förskolan

Undervisning i matematik förekommer på alla nivåer i det svenska utbildnings-systemet. Redan i läroplanen för förskolan finns ”mål att sträva mot” som har anknytning till matematikkunskaper. Speciellt betonas förskolans uppgift att ge barn med särskilda behov möjligheter till utveckling.

Läroplanen för sexårsverksamheten innehåller också formuleringar som betonar vikten av utvecklingen av vad man skulle kunna kalla den matematiska förmågan.

Grundskolan

I grundskolan ges undervisning i matematik i samtliga årskurser. Enligt nu gällande regler skall eleverna i grundskolan få en undervisning sammantaget i åk 1–9 omfattande minst 6 665 timmar. Av dessa skall minst 900 timmar (eller drygt 13 procent) vara i matematik. Men det finns många möjligheter att utöka antalet matematiktimmar genom lokala och individuella val.

Gymnasieskolan

I gymnasieskolans läroplan finns idag sammanlagt fem kurser i matematik (Kurs Ma A - Ma E), där Ma B bygger på stoffet i kurs Ma A osv. Dessutom förekommer lokalt ytterligare kurser (Ma F, Ma G) som kan väljas av eleverna. Kurserna är poängsatta. Poängtalet ger ett riktvärde för det antal timmar som bör avsättas för undervisning på kursen. Varje kommun har möjlighet att ändra timantalet.

Den första kursen Ma A (110 p) är obligatorisk inom alla nationella program i gymnasieskolan. Kursen Ma B (40 p) är obligatorisk inom tre program (Naturvetenskapsprogrammet (NV), Samhällsvetenskapsprogrammet (SP) och det estetiska programmet (ES)). Kursen Ma C är obligatorisk för NV-programmets elever och för de flesta elever på SP-programmet. Kursen Ma D är obligatorisk för NV-programmet, medan kurs Ma E är ”alternativkurs” på samma program. (Man skall antingen välja Ma E eller en kurs i miljökunskap).

Lsåret 1996/97 fick sammanlagt 74 242 elever slutbetyg från gymnasieskolan. Av dessa hade 73 426 eller 99 procent betyg på kurs Ma A (varav knappt 7 procent hade betyget icke godkänd). Nära 40 000 elever hade slutbetyg på kurs Ma B på de tre program där denna kurs är obligatorisk. Motsvarande antal på Ma C, Ma D och Ma E var ca 34 000, 15 000 och 13 500.

Komvux

Matematik är ett mycket stort ämne i den kommunala vuxenutbildningen. Inom den grundläggande vuxenutbildningen är matematik det näst största ämnet strax efter engelska. 1996/97 läste ca 35 000 personer matematik i grundvux. Inom den gymnasiala vuxenutbildningen finns samma kurser som i gymnasieskolan. Läsåret 1996/97 läste ca 40 000 personer kurserna Ma A och Ma B. Drygt 30 000 läste Ma C. Dessa tre matematikkurser hörde till de åtta mest frekventa av alla kurser. Även kurserna Ma D och Ma E förekommer inom Komvux. Antalet studerande på dessa kurser har dock inte varit tillgängligt för bedömningsgruppen.

Högskoleutbildning i matematik

Inom högskolan är matematik det största enskilda ämnet. Läsåret 1997/98 var sammanlagt drygt 42 000 studenter registrerade på någon kurs inom ämnet matematik. Det betyder att nära 14 procent av studenterna ett visst läsår läser minst en matematikkurs i högskolan. Antalet som läser matematik ökar snabbt. Läsåret 1993/94 var antalet studenter som läste matematik drygt 32 500. Detta innebär en ökning på 30 procent under en fyraårsperiod.

Antalet studenter som läser matematik kan väntas öka ytterligare under de närmaste åren. Just nu planeras för de närmaste två åren en sammantagna en ökning av högskolornas kapacitet så att man kan ta emot minst 30 000 fler helårsstudenter. Minst hälften av dessa är tänkta att vara inom det naturvetenskapligt-tekniska området. Det kommer sannolikt att innebära en fortsatt kraftig utbyggnad av undervisningen i matematik till kanske 50 000 registrerade per läsår eller mer.

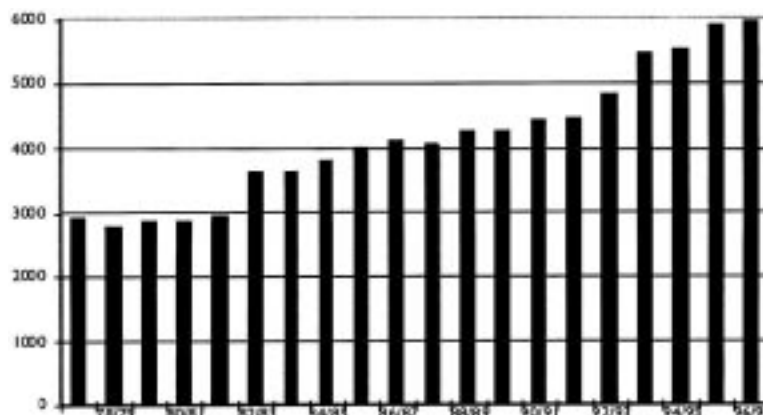
De studenter som läser matematikkurser på högskolenivå finns i olika grupper:

Civilingenjörsutbildning

Varje år tas cirka 6 000 studenter in på civilingenjörsutbildningen. De läser minst 20 – 40 poäng obligatoriska kurser i matematik och tillämpade matematiska ämnen (matematisk statistik och numerisk analys). På många program läser man betydligt mera matematik.

Antalet nybörjare på civilingenjörsutbildningarna har fördubblats under den senaste 20-årsperioden (se diagram 1).

Diagram 1: Antalet nybörjare 1977/78 – 1996/97 på civilingenjörsutbildningar



Högskoleingenjörsutbildning

Under 1990-talet har nya ingenjörsutbildningar byggts upp inom högskolan, som ersättning för den tidigare utbildningen inom åk T4 på gymnasieskolans tekniska linje. Ursprungligen var dessa utbildningar tvååriga. Numera är de i de flesta fall treåriga. Förutom ingenjörsexamen kan dessa program leda fram till kandidatexamen och magisterexamen i teknik. Läsåret 1996/97 började 7 294 studenter på ingenjörsutbildningarna tre år tidigare (1993/94) var motsvarande siffra 5 456. Antalet kan väntas öka ytterligare.

Matematisk-naturvetenskapliga utbildningar

Inom det naturvetenskapliga området börjar varje år 3 000–4 000 studenter. Många läser 30–40 poäng matematik eller mer som en del i sin utbildning. Andra börjar på utbildningar med inriktning mot biologi och geovetenskap. Många av dessa läser också matematik under högskoletiden. Praktiskt taget alla utbildningar utgår från att studenterna har läst matematik motsvarande NV-programmets kurs.

Lärarytbildningar

Många blivande lärare läser också matematik. Det gäller grundskollärarytbildningen för åk 1–7 och för åk 4–9, i båda fallen med inriktning mot matematik och NO-ämnena och gymnasielärarytbildningen för dem som skall ha matematik som ett av sina undervisningsämnen.

Omfattningen av utbildningen av blivande lärare med matematik som ett av undervisningsämnena har varierat i ett 25 års perspektiv. Just nu är det stor efterfrågan på lärare med matematikkombinationer, men man kan inte fylla de utbildningsplatser som finns. I ett något längre perspektiv kommer efterfrågan på nya grundskolelärare i allmänhet att minska högst avsevärt eftersom antalet födda barn de senaste åren har minskat kraftigt. Däremot kommer behovet av lärare i matematik för gymnasieskolan att öka kraftigt.

5. Mål och metoder för matematikundervisningen

Matematik är ett ämne med egen metodik och didaktik

En utgångspunkt för bedömningsgruppens arbete har varit att matematik är ett självständigt ämne som, liksom svenskan, bör ses som ett generellt redskap för analys, kommunikation och beslutsfattande. Detta bör också vara en utgångspunkt för undervisningen i matematik. Självklart skall undervisningen i matematik innehålla (och kanske också utgå från) olika tillämpningar antingen i vardagslivet eller i andra ämnen. Det är dock viktigt att man ser matematik som ett *eget ämne med egen didaktik och metodik*. All erfarenhet visar att lärande av matematik har sin egen struktur. De problem som möter eleven eller studenten är delvis av en annan karaktär än de som uppstår inom andra ämnen. Det betyder också att man inte kan undervisa i matematik enbart enligt någon slags generell metod som är tillämpbar för alla skolämnen utan att det behövs speciell kompetens för att undervisa i matematik. Mot denna bakgrund är det tillfredsställande att matematikämnet lyftes fram som ett speciellt område i årets budgetproposition inför det nya NOT-projektet:

*”För många av de ungdomar som väljer bort naturvetenskap och teknik har matematiken en avgörande betydelse. Därför bör även matematiken ägnas uppmärksamhet i ett nytt NOT-projekt.”*⁶

Sedan propositionen skrevs har beslut tagits om det nya NOT-projektet. Det visar sig att det inte innehåller några speciella skrivningar om ämnet matematik. Istället har det underhand framkommit att regeringen planerar ett speciellt ”matematik-projekt”. Det är ännu inte klart vilka uppgifter som detta projekt kommer att få. I anslutning till budgetpropositionen inrättas vidare ett matematikdidaktiskt centrum med Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola som gemensamma huvudmän.

I båda fallen har ämnet matematik fått en speciell behandling som tyder på att staten är beredd att satsa just på matematiken som ett eget ämne och inte som ett stödämne till andra ämnen.

Matematikinlärning är en lång process

Utvecklingen av en persons matematikkunskaper är en lång process som börjar långt före skolstarten, och där de olika stegen hänger ihop och har mycket gemensamt. Denna process bör ses som en helhet, från det lilla barnets första

⁶ Prop. 1998/99:1 utgiftsområde 16 sid 39.

upplevelser av antalsbegreppet och enkla operationer med de naturliga talen till de sista matematikkurserna i en civilingenjörsutbildning eller vid universitetens ämnesstudier i matematik.

Även om vår uppgift i första hand är att studera och ge synpunkter på de problem som kan finnas vid övergången från gymnasieskola till högskolestudier inom naturvetenskap och teknik skall vi mot denna bakgrund utgå från en helhetssyn på matematikundervisningen.

Syfte och mål

I läroplanen för gymnasieskolan finns följande formulering om syftet med matematikundervisningen:

”Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer. Undervisningen skall utveckla elevernas nyfikenhet, öppenhet, analytiska förmåga, kreativitet och ihärdighet vid matematisk problemlösning samt förmåga att generalisera, abstrahera och estetiskt fullända lösningar och resultat.

Undervisningen skall sträva efter att eleverna skall få uppleva tillfredsställelsen i att behärska matematiska begrepp och metoder, i att upptäcka mönster och samband och i att lösa problem samt lära sig använda och inse värdet av matematikens symboler och uttryckssätt. Väsentligt är att eleverna lär sig förstå och föra matematiska resonemang, skapa och använda matematiska modeller och kritiskt granska deras förutsättningar, möjligheter och begränsningar samt lära sig redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt.

Eleverna skall få förståelse för att matematiken har sitt historiska ursprung i många äldre kulturer och få inblickar i hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas samt lära sig att med förtrogenhet och omdöme använda sig av miniräknare och datorer som matematiska verktyg.”

Vi instämmer i denna målbeskrivning och menar att den väl passar för hela utbildningsprocessen i matematik (och inte bara för gymnasieskolan).

Teori, metodkunskap och tillämpningar

Kunskaper inom ett matematikområde kan vara av olika typ. Det kan gälla förståelse för de begrepp och samband som finns inom en teori. Man kan kalla det att kunna den matematiska *strukturen* eller matematisk *teori*. Men det kan också vara förmågan att använda de metoder, resultat och begrepp som finns i strukturen, något som ofta kallas räknefärdighet, men som med ett bättre namn skulle kunna kallas *metodkunskap*. Ytterligare en form av kunskap utgörs av förmågan att använda matematiken i olika *tillämpningar*. Dessa kan vara både *inommatematiska* och tillämpningar inom *andra områden*.

Gränserna mellan de olika typerna av kunskaper är flytande. En matematisk metod – t.ex. metoden att lösa en andragradsekvation med kvadratkomplettering

– kan när den presenteras första gången för eleven ses som en del i det som här har kallats strukturen. Men när hon eller han går vidare och använder metoden i anslutning till andra matematiska problem med eller utan tillämpningsanknytning är det naturligt att se lösningen av andragradsekvationen som en del i metodkunskapen. Metoden för kvadratkomplettering transformeras till en formel i vilken man kan sätta in värdet på ekvationens koefficienter.

På samma sätt kan uppgifter ha sin rot i en tillämpningssituation och först ses som en tillämpning av den grundläggande strukturen, eventuellt kombinerad med tidigare kunskaper. Så småningom kan förmåga att lösa problemen snarare betraktas som räknefärdighet eller metodkunskap. Ett exempel kan vara formeln för radioaktivt sönderfall, som baseras på ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Från denna kan man härleda sambandet

$$y(t) = y_0 e^{-ct}$$

För att tillämpa detta samband t.ex. för att beräkna halveringstiden, när mängden radioaktivt material vid två tidpunkter är känd, måste man veta en del om sambandet mellan exponentialfunktionen och logaritmfunktionen, som kan baseras på den allmänna teorin för funktioner och deras inverser. Sedan en elev räknat några olika uppgifter på området är det naturligt att hon eller han uppfattar uppgiften att lösa ytterligare problem av samma slag som en användning av en standardmetod.

Det är ingen motsatsställning mellan de tre olika typerna av matematiskt kunnande. De kompletterar varandra. Goda kunskaper inom ett matematikområde kräver att samtliga tre aspekter behärskas. Man bör känna till de viktigaste delarna av den matematiska strukturen för området. Man bör också vara någorlunda säker på att kunna tillämpa teorien och genomföra de algoritmer som hör till på konkreta uppgifter. Slutligen bör man kunna tillämpa matematiken inom området för att lösa både matematiska och tillämpade problem. Samtliga typer av kunnande är också önskvärda för att det ska vara möjligt att gå vidare till nästa matematikområde.

Vad kommer först?

Inom matematikens historia finns många exempel som visar att utvecklingen av ett matematikområde kan börja med var och en av de tre aspekter som nämns i föregående avsnitt. Man kan ha börjat rent inommatematiskt. Frågeställningen har kopplats till de matematiska strukturerna. Men det finns också exempel på teorier som uppkommit som ett svar på frågor som hänger ihop med tillämpningarna. Och det finns beräkningsproblem som lett fram till nya matematiska teorier.

I *undervisningen* har man under olika perioder betonat olika delar av

kunnandet inom de olika matematikområdena. Traditionellt har det som här har kallats metodkunskap uppfattats som viktigt. Som en motvikt uppstod under slutet av 1960-talet i stället ”den nya matematiken” där reformatörernas utgångspunkt var att framförallt främja förståelsen. Man kan lite tendentiöst säga att det viktigaste var att förstå att $6 \cdot 7$ får man genom upprepad addition av sex sjuor, inte att veta att $6 \cdot 7 = 42$. Numera synes undervisningen främst präglas av att matematiken uppfattas som ett verktyg för att studera tillämpningsproblem. Denna omsvängning kan uppfattas som en reaktion mot ”den nya matematiken” och som en följd av svårigheterna att nå de önskade och av förespråkarna utlovade effekterna. Krav från en allt bredare elevgrupp att motivera varför man skall studera matematik kan också ha bidragit.

De olika utbildningsmomenten bygger på varandra

Utbildning i matematik sker ofta kumulativt. Man lär sig successivt nya begrepp och nya metoder som man senare bygger på och tillämpar för att gå vidare inom ämnet. Detta är en följd av matematikens egen struktur. Det betyder att det ofta är nödvändigt att eleven har en viss förtrogenhet med ett kursavsnitt innan han/hon kan (och bör) gå vidare till nästa avsnitt. Men det finns också en återkoppling. När eleven bygger vidare på nästa nivå händer det ofta att hon eller han får en djupare förståelse för den matematik som man läst tidigare.

”Matematisk mognad”

Sättet att lägga upp inläringen av matematik kan naturligtvis variera med tiden och den utbildningsnivå det gäller. Men det är viktigt att man inte begränsar sig till bara en av de tre kunskapstyperna. Det slutliga målet för utbildningen måste, oberoende hur undervisningen läggs upp, vara att eleven får en förståelse för de olika sätten att se på ett matematikområde och att eleven också kan kombinera de olika perspektiven.

Mera konkret skulle vi vilja ange följande som *det primära målet för all matematikundervisning* oberoende av nivå.

- Man kan med en hög grad av säkerhet använda de enklaste standardmetoderna inom de aktuella matematikområdena.
- Man kan på egen hand använda matematik för att analysera olika situationer från vardagen, arbetslivet eller andra vetenskaper.
- Man kan läsa en matematisk text, tolka matematiska formler och följa ett matematiskt resonemang.
- Man kan i tal och skrift kommunicera matematiska resonemang till andra.
- Man har förstått matematikens idé: Om vissa förutsättningar är uppfyllda så kan man med matematik med absolut visshet dra vissa slutsatser.
- Man kan använda sina kunskaper i matematik i nya situationer på ett

kreativt sätt samtidigt som man kan bedöma vilka matematiska metoder och samband som går att använda vid olika tillfällen.

- Man kan kombinera teorier och metoder från olika matematikområden samt effektivt och kritiskt utnyttja tekniska hjälpmedel.

Dessa sju egenskaper sammantagna betecknar vi i fortsättningen *matematisk mognad*.

Matematisk mognad är inte en egenskap som man har eller inte har. Istället är det en egenskap som har anknytning till en utvecklingsprocess. Ett mål för matematikundervisningen kan därför sägas vara att hos de studerande *öka* den matematiska mognaden inom ett visst område.

6. Förkunskaper i matematik bland högskolestudenter

Ursprunget till det uppdrag som bedömningsgruppen har var rapporter om att förkunskaperna i matematik hos nybörjarna på civilingenjörsutbildningarna under de senaste åren hade blivit sämre. Dessa uppgifter baserades inte bara på resultat från de förkunskapstest som under många år hade gjorts med nybörjarna på olika tekniska högskolor utan också på vittnesbörd från erfarna högskole- och gymnasielärare.

De ursprungliga förkunskapstesten avsåg i första hand studenternas räknefärdighet (metodkunskap). Under de allra senaste åren har också nya förkunskapstest eller diagnostiska test med ett bredare innehåll utvecklats. Vissa av dessa har också, till skillnad från de tidigare, använts för en bredare krets av studenter. Man har inte bara testat de blivande civilingenjörerna utan också studenter på matematisk-naturvetenskapliga utbildningar, vissa lärarutbildningar och det växande antalet studenter på ingenjörsutbildningarna.

De som varit ansvariga för de olika förkunskapstesten har i olika rapporter (bilaga 3–6 och bilaga 9) redovisat sina resultat. Resultaten från några av proven från höstterminen 1998 har också bearbetats inom bedömningsgruppens kansli (bilaga 7–8).

Frågeställningar

Den första och ursprungliga frågan gäller *på vilket sätt kunskaperna i matematik hos dagens studenter när de skall börja högskolestudierna skiljer sig från tidigare årgångars.*

Men oberoende av hur man uppfattar den tidigare utvecklingen kan man också fråga: *Har de studenter som idag börjar högskolestudier inom teknik och matematik/naturvetenskap förkunskaper som passar till de krav som utbildningarna ställer?*

Även en tredje fråga är aktuell. *Hur viktiga för de fortsatta studierna är de förkunskaper och den förkunskapsnivå som studenten har i form av tidigare betyg eller resultat på förkunskapsprov? Spelar de någon roll eller kan man under högskolestudierna "reparera" det som missats tidigare?*

Har förkunskaperna förändrats?

Förkunskapstest för dem som börjar på civilingenjörsutbildningar har förekommit vid olika universitet/högskolor alltsedan början 1970-talet. Dokumentationen har inte varit fullständig och uppgifterna har till stor del varit

hemliga för att kunna användas år från år. De längsta testserierna finns från civilingenjörsutbildningarna vid Chalmers, i Linköping och i Luleå.

Vid Chalmers har man sedan 1973 som inledning till en 30 timmars introduktionskurs i matematik gett ett prov på 9 uppgifter. Studenterna får 30 minuter på sig. Uppgifterna tas från en bank på ca 30 uppgifter som återkommer med jämnan mellanrum. I en rapport som bifogas (bilaga 3)⁷ har Rolf Pettersson gjort en sammanfattning. Huvudresultatet är att med undantag för några geometriuppgifter så var testresultaten för olika problemtyper påfallande konstanta fram till år 1993 trots att gymnasiekurserna ändrades under denna tid och trots att antalet nyantagna ökade med cirka 50 procent. Mellan 1993 och 1994 fick man en kraftig nedgång i lösningsfrekvenserna vilken konfirmerades 1995 och sedan fortsatte 1996 och 1997.

Chalmerstestet från 1997 har också varit ett viktigt grundmaterial i Bengt Johanssons rapport *Förkunskapsproblem i matematik*.⁸ Han har bl.a. låtit några gymnasielärare bedöma de olika testuppgifterna i relation till gymnasiekursen som den ser ut idag. Lärarna ombads att ange hur relevanta de olika uppgifterna är för gymnasietutbildning idag på en skala från 1 (*i mycket liten grad*) till 5 (*i mycket hög grad*). Lärarna ombads också att i samma skala ange relevansen, som de bedömde att den varit åren 1993, 1988 och 1978. Åtta uppgifter av nio fick ett relevansvärde på över 3, av dessa fick fyra ett värde på över 4. I förhållande till 1993 har det genomsnittliga relevansvärdet minskat något (0,23 enheter, vår beräkning). Detta kan knappast förklara den kraftiga minskning i lösningsfrekvens på testet (ca 10 procentenheter per uppgift) som inträffade mellan 1993 och 1994.

Vid civilingenjörsutbildningen vid Linköpings universitet får teknologerna första dagen vid universitetet göra ett flervalssprov med 15 enkla uppgifter. Provet har varit identiskt genom åren. I en rapport (bilaga 4)⁹ redovisar Folke Norstad resultatet på testet för de studenter som har det högsta betyget från gymnasieskolan i matematik och fysik. Huvudresultatet är att för denna grupp har resultaten på proven under en längre tid blivit sämre men med en accelererad nedgång under de senaste åren. Siffrorna för 1998 ligger dock enligt uppgift något över 1997 års.

Tekniska universitetet i Luleå har också sedan lång tid gett förkunskapsprov till de nya teknologerna. Andrejs Dunkels¹⁰ gör i bilaga 5¹¹ en noggrann redovisning av de två test som gavs vid civilingenjörsutbildningen i Luleå före och efter den propedeutiska kursen 1998. Där finns också jämförelser med tidigare års test. I en speciell kommentar (bilaga 6)¹² ger Dunkels också en

⁷ Rolf Pettersson. *Resultat av diagnostiska prov i matematik för nyantagna teknologer vid civilingenjörs- linjerna Chalmers, 1973–1998.*

⁸ Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket, Stockholm 1998.

⁹ Folke Norstad. *Resultat av diagnostiska prov vid Tekniska Högskolan i Linköping.*

¹⁰ Andrejs Dunkels avled hastigt den 30 december 1998.

¹¹ Andrejs Dunkels. *Propedeutiska kursen i matematik. Redovisning av resultat av test 1 och 2 ht 1998.*

¹² Andrejs Dunkels. *Propedeutiska kursen 1998 – några reflektioner och synpunkter.*

allmän kommentar till testets innehåll och resultatutvecklingen. Hans slutsats blir:

”Såväl mina erfarenheter som tillgängliga data tyder på att förkunskaperna bland våra teknologer har försämrats genom åren.”

Vår slutsats är också att teknologernas förkunskaper inom de områden som prövas i de aktuella testen under en 10–15-års period har blivit sämre i genomsnitt. Testen avser också i mycket kunskaper och färdigheter som är viktiga för de fortsatta studierna inom civilingenjörsutbildningen.

Man kan konstatera att antalet studenter på civilingenjörslinjerna har ökat kraftigt. I början av 1970-talet då man startade med de årliga förkunskapsproven började årligen ca 2 500 studenter på civilingenjörsutbildningarna. Idag är siffran uppe i över 6 000.

Vi tycker dock inte att detta kan motivera att man måste acceptera sämre förkunskaper i matematik för blivande civilingenjörer i dag än för 25 år sedan. Andra matematikområden kan vara aktuella idag, men sammantaget krävs det snarare bättre och mer omfattande kunskaper i matematik av en civilingenjör i dag än för 25 år sedan. Det kan man inte uppnå om man måste börja utbildningen med studenter som står på en sämre kunskapsnivå än man gjorde tidigare.

De prov som har beskrivits i de ovan nämnda rapporterna har i första hand avsett räknefärdigheten. Men det krävs även andra slags matematikkunskaper än dem som testats i dessa prov. Vi vet ingenting säkert om den långsiktiga utvecklingen av sådana kunskaper hos nybörjarna på civilingenjörsutbildningarna som vi tidigare associerat med begreppet matematisk mognad. Men vi kan undersöka hur läget är idag, vilket redovisas i nästa avsnitt.

Vad kan de nyblivna matematikstudenterna idag?

Det finns numera mer generella test än de som beskrevs i föregående avsnitt. Inom kansliet har två sådana prov studerats: Ett från KTH och ett från Umeå universitet. Det senare har också använts för vissa studenter i Uppsala och i Sundsvall (Mitthögskolan).

KTH-testet, vilket gjordes 1998 med civilingenjörsstudenterna för andra året i följd, innehåller några uppgifter av ren räknefärdighetskaraktär men också andra som mera kan associeras med matematisk mognad. Analysen av provet ges i bilaga 7¹³. Mycket kort kan man formulera rapportens resultat på följande sätt:

Teknologerna på KTH är bäst på räkneuppgifter som avser grundkunskaper. I de flesta fall är detta kunskaper som hör till grundskolans kurs. På rutinuppgifter som hör till gymnasieskolans kurs är resultaten något sämre.

¹³ Lars Brandell och Carina Mood-Roman. *Matematikkunskaperna hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH (Kungliga Tekniska Högskolan)*.

Övriga uppgifter i KTH-testet kan sägas pröva förmågor som matematisk allmänbildning, matematisk mognad och kreativitet. Här är resultaten betydligt sämre än för ”rutinuppgifterna”.

Testresultatet har också samband med de betyg man har med sig från skolan. Ju högre betyg desto bättre testresultat. Det finns också skillnader beroende på hur länge sedan man läste matematik senast. Har man varit borta ett tag så är man osäkrare och får sämre resultat. Detta gäller dock inte i lika hög grad för dem som hade högsta betyget (MVG) på de sista kurserna i gymnasieskolan.

Det är också stora skillnader i testresultat mellan studenterna på olika utbildningsprogram. På de tre program där man hade de bästa resultaten (F, I och D) var lösningsfrekvensen (dvs. den genomsnittliga andelen lösta uppgifter) mellan 65 och 70 procent. För de tre program som hade de lägsta resultaten (B, V och L) låg lösningsfrekvensen kring 45 procent. De största skillnaderna gäller resultaten på testuppgifter som kan sägas mäta den matematiska allmänbildningen och kreativiteten.

Inom vart och ett av de olika programmen finns stora skillnader i testresultaten mellan de olika teknologerna.

Analysen av Umeåtestet finns i bilaga 8.¹⁴ Medan de test som behandlats ovan alla har tagit sin utgångspunkt i olika delar av den matematik om man anser är viktig för de fortsatta studierna i civilingenjörsutbildningen, har man i Umeå utgått från gymnasiets matematikkurs. Egentligen handlar det om fyra deltest på vardera en timme. Tre av dessa är kopplade till de olika kurserna i gymnasieskolan. Ett test innehåller enkla uppgifter på matematikavsnitt som ingår i kurserna Ma A och Ma B, ett annat är kopplat till kurserna Ma C och Ma D, ett tredje till Ma E. Det fjärde testet innehåller mer sammansatta problemlösningsuppgifter. Proven har utarbetats i samarbete med gymnasielärare i matematik.

Umeåprovet har givits till alla studenter som börjar läsa matematik vid universitetet och inte bara till teknologer på civilingenjörsutbildningarna. Man kan i huvudsak urskilja fyra olika studentgrupper bland dem som gjort testet. Ca 200 studenter var nybörjare på olika program med inriktning mot civilingenjörsexamen. Något mer än 100 studenter läste olika utbildningar inom det matematisk-naturvetenskapliga området. Ca 225 studenter läste på program med inriktning mot ingenjörsexamen och ett sextiotal läste på grundskolläraryrket (både blivande 1–7-lärare och 4–9-lärare med inriktning mot matematik/No-ämnen).

Det är stora skillnader i testresultat mellan studenterna inom olika typer av utbildningar. Teknologerna har de bästa resultaten. De ligger ungefär 10 procentenheter i lösningsfrekvens över nästa grupp som är de studenter som läser matematik inom något av den matematisk-naturvetenskapliga fakultetens program. Ytterligare 10 procentenheter lägre ligger resultaten för studenterna

¹⁴ Carina Mood-Roman. *Förkunskaper i matematik bland nyintagna studenter på matematisk-naturvetenskapliga och tekniska utbildningar; resultat av förkunskapstest i Umeå, Uppsala och Sundsvall (Mithögskolan).*

på ingenjörsprogrammen. På samma nivå ligger också de studenter som läser till grundskolläraexamen.

Exempelvis har teknologerna en genomsnittlig lösningsfrekvens på 57,6 procent på det prov som testar kunskaper på kurserna Ma C och Ma D. Motsvarande resultat för studenterna inom det matematisk-naturvetenskapliga området var 42,4 procent, medan ingenjörstudenterna och lärarkandidaterna låg ytterligare 10 procentenheter lägre (32,1 resp 31,0).

Inte oväntat var det ett mycket starkt samband mellan studenternas betyg från de olika kurserna i gymnasieskolan och resultaten på testen. Studenter som läst på Komvux hade i allmänhet, som grupp, lägre resultat på testen än studenter som kom från gymnasieskolan med samma betyg. Detta behöver inte betyda att Komvux är mera generösa med betygen än gymnasieskolan. Däremot är det ett tecken på utbildningstidens betydelse. Eleverna i Komvux läser ofta mer koncentrerat och får också mindre undervisning per kurs än gymnasieskolans elever. Resultaten tyder på att detta innebär att de "glömmer" mer är gymnasieskolans elever som fått mer undervisning och kunnat använda mer tid till studierna (om än inte tillräcklig).

Några exempel på lösningsfrekvenser på enskilda uppgifter i Umeå-testet

Uppgiften

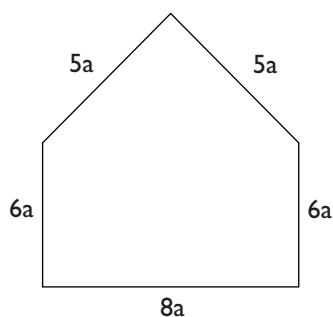
$$\text{Lös ekvationen } 18 - 3x = 3x^2$$

gavs på det test som gällde gymnasiekurserna Ma A och Ma B. Det är en enkel andragradsekvation utan komplikationer med rötterna $x = 2$ och $x = -3$. Lösningsfrekvensen varierade för de olika utbildningsgrupperna. Uppgiften löstes av 73 procent av studenterna på civilingenjörsutbildningarna. Bland studenterna på de matematisk-naturvetenskapliga utbildningarna var lösningsfrekvensen 57 procent, medan den låg på 41 procent både bland dem som läste på ingenjörstudier och bland dem som skulle bli grundskollärare.

Sambandet med gymnasiebetygen var påtagligt. I den grupp studenter som hade betyg från det nya gymnasiet löstes uppgiften av 40 procent av dem som hade betygen G på kursen Ma B i gymnasieskolan. Uppgiften klarades av 60 procent av dem som hade VG och 70 procent av dem som hade MVG.

En något annorlunda fördelning av resultaten gäller för uppgiften

Ange ett uttryck för husgavelns totala area



Den löstes av 65 procent av studenterna med MVG på kurs B men bara av något mer än 30 procent av dem som hade VG eller G.

På CD-provet gavs en uppgift om räta linjens ekvation:

En rät linje går genom punkterna (-1,3) och (1,9). Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + l$.

Uppgiften löstes av 80 procent av studenterna på civilingenjörsutbildningarna, 60 procent av dem som läste på matematisk-naturvetenskapliga utbildningar och 55 procent av ingenjörstudenterna och lärarkandidaterna.

Bland dem som hade betyg från nya gymnasieskolan löstes uppgiften av knappt 85 procent av dem som hade betygen MVG på kursen Ma D, 75 procent av dem som hade VG och något mer än 45 procent av dem som hade betyget G på samma kurs.

Det är naturligtvis svårt att avgöra i vilken mån de förkunskaper som redovisas i de olika undersökningarna är tillräckliga eller ej för de fortsatta högskolestudierna. Man måste också framhålla att provets utformning i en ny miljö första dagen av högskolestudierna kan innebära att man presterar sämre än man skulle göra i en mer gynnsam situation. Proven görs också utan formelsamling eller miniräknare vilket också är ovant för de flesta. Dessutom kan studenterna vara lite ringrostiga efter en kortare eller längre tid då man ägnat sig åt annat än matematikstudier.

Men även mot denna bakgrund är det allmänna intrycket att vissa studenter har brister i sina kunskaper från gymnasieskolans kurser. Detta intryck stärks också av en redogörelse för resultaten av intervjuer med erfarna högskolelärare som gjorts vid Luleå tekniska universitet (bilaga 9¹⁵). De intervjuade lärarna är överens om att många nybörjare är osäkra på kunskaper som hör till områden i grundskolans och gymnasieskolans kurs. Det kan gälla förmågan att hantera rationella uttryck och uttryck som innehåller elementära funktioner. Hos vissa studenter kvarstår dessa osäkerheter även efter en lång tid i systemet. Men detta gäller mer än att förenkla uttryck eller att lösa ekvationer: I rapporten identifieras fem områden, där osäkerhet förekommer.

- Kunskap om elementära funktioner som ingår i gymnasiekursen.
- Förmåga att resonera logiskt.
- Problemlösningsförmåga.
- Intuition och känsla för matematiska begrepp.
- Behandling av rationella och algebraiska uttryck.

Ett viktigt resultat av de undersökningar som redovisas ovan är den stora skillnaden (av studenternas kunskaper i genomsnitt) mellan olika utbildningar. Man diskuterar ibland som om problemen i första hand skulle finnas på civilingenjörsutbildningarna. Men att studenterna på övriga typer av utbildningar

¹⁵ Gerd Brandell. *Förkunskaper och studieresultat i matematik hos Luleås civilingenjörstudenter. Rapport från två undersökningar av nybörjarna vid universitetet.*

får betydligt sämre resultat på förkunskapsproven än teknologer talar för att problemen är stora för alla högskoleutbildningar som innehåller matematik.

Ytterligare ett viktigt resultat är den stora spännvidden som finns mellan studenter på samma utbildning. Det ställer speciella krav på pedagogiken och den pedagogiska organisationen inom de olika högskoleutbildningarna.

Vilken betydelse har förkunskaperna från gymnasieskolan för studieresultaten?

Man kan fråga sig vilken betydelse som förkunskaperna från gymnasieskolan har för de fortsatta högskolestudierna. I den ovan nämnda rapporten (bilaga 9) visar Gerd Brandell att de finns mycket starka samband mellan förkunskaper från gymnasieskolan och studieframgång i matematik i högskolan. Studien avser de studenter som skrevs in på civilingenjörsutbildningen i Luleå hösten 1993 och gäller resultaten efter två år på den grundläggande kursen i matematik som läses under den första årskursen i utbildningen. Både antalet avklarade deltentamina och betyget på matematikkursen visar mycket starka samband med gymnasiebetyget i matematik. Dubbelt så stor andel av dem som hade "överbetyg" från gymnasieskolan (betyget 4 eller 5) hade efter två år blivit godkända på kursen jämfört med dem som hade betyget 3 från gymnasiet.

När det gäller studenter som gått i den nya gymnasieskolan finns ännu så länge inga längre uppföljningar. I bearbetningen av Umeå-testen (bilaga 8) finns dock en jämförelse mellan studenternas förkunskaper och resultaten på de allra första tentamina. Förkunskaperna mäts dels genom gymnasiebetygen dels genom resultaten på förkunskapsproven. Undersökningen begränsas till de studenter som läser matematik inom ramen för naturvetarutbildningarna. Det visar sig vara ett mycket starkt samband mellan resultaten på förkunskapstesten och resultaten på de första två tentamina som studenterna gör. Ännu större är sambandet mellan gymnasiebetygen och studieresultaten. De som har betyget MVG på kurs Ma D i gymnasieskolan verkar inte ha några svårigheter med studierna, medan de som har G på samma kurs har, åtminstone initialt, mycket svårt att klara tentorna. Uppföljningen bygger på ett litet antal studenter och gäller bara de två första tentamina (på sammanlagt 10 poäng), men preliminärt verkar det som om studenter med betyget G på de senare matematikkurserna i gymnasieskolan (Ma D och Ma E) som grupp kan få det ännu svårare att klara utbildningen än de studenter som fick betyget 3 i den tidigare gymnasieskolan.

Under alla förhållanden är det klart att förkunskaperna i matematik från gymnasieskolan, vare sig de mäts genom förkunskapsproven eller genom gymnasiebetygen har en stor betydelse för studieframgången i matematik i högskolan.

7. Annat underlag för bedömningsgruppens arbete

Bedömningsgruppen består av personer som på ett eller annat sätt är verksamma i matematikundervisningen inom gymnasieskolan eller inom högskoleområdet. De egna erfarenheterna har därför varit en naturlig utgångspunkt för gruppens ställningstagande och de förslag till åtgärder som presenteras i de följande kapitlen.

Underlaget för vårt arbete har utvidgats genom de undersökningar av förkunskapsprov och studieresultat som redovisades i föregående kapitel samt genom olika undersökningar och sammanställningar av fakta och synpunkter från många olika aktörer. Delar av detta presenteras här.

Hearings med lärare från gymnasieskolor och högskolor/ universitet och studenter

Under vecka 3, 1999, anordnade bedömningsgruppen tre hearings med matematiklärare (från gymnasier och högskolor) och studenter och andra intresserade. Dessa ägde rum i Stockholm, Lund och Umeå. Sammanlagt deltog drygt 200 personer i mötena. Majoriteten av deltagarna var lärare från olika gymnasieskolor, men det fanns även deltagare som var högskolelärare i matematik, och också studenter samt ett antal utbildningsansvariga från fakulteter (motsv.) vid universitet och högskolor.

Till hearingarna utsändes, dels tre diskussionspromemorior, dels tidigare versioner av de bilagor om förkunskapstest och studieresultat som också bifogas denna rapport. Diskussionerna behandlade naturligt nog varierande ämnen men var koncentrerade kring tre frågekomplex:

- Matematiken och matematikundervisningens roll och betydelse för individ och samhälle.
- De nya studenternas förkunskaper i matematik förr och nu.
- Lämpliga åtgärder för att förbättra förkunskapssituationen.

På den första punkten blev diskussionen ganska kort. Det fanns en stor uppslutning bakom den text som bedömningsgruppen hade lagt fram och som utvecklas i kapitel 3 och 5 i denna rapport.

På nästa fråga handlade de flesta inläggen om olika möjliga förklaringar till utvecklingen. Vissa pekade på den skillnad som finns i "kultur" mellan gymnasieskola och högskola. Gymnasiet tillåter vanligen att eleverna använde både formelsamling och grafritande räknare. Universitet och högskolor gör det normalt inte, åtminstone inte i förkunskapsproven och i de inledande matematik-

kurserna. Detta kan vara en del av en förklaring till de dåliga resultaten på förkunskapstesten. Men de flesta höll med om att nivån hade sänkts. Speciellt framhöll man att många av de elever som fått betyget G skulle ha fått betyget 2 i det tidigare systemet. De senare var inte behöriga för högskolestudier i matematik men är det alltså idag och de kan också finnas som matematikstudierande i högskolan på många håll.

Situationen i gymnasieskolan

Många vittnade om situationen i gymnasieskolan och pekade på en rad förhållanden som kunde bidra till att resultatet av matematikundervisningen inte alltid var så bra som man skulle kunna önska. Bl.a. tog man upp följande

Förkunskaperna från grundskolan.

Många skolor genomför tester av de nyblivna gymnasisternas förkunskaper i matematik från grundskolan. En genomgående observation var den stora spridningen i förkunskaper. Denna kunde se olika ut beroende på vilket gymnasieprogram de gällde. På vissa, t. ex på NV-programmet var fördelning av resultaten på förkunskapstesten förskjutna åt det positiva hållet. På andra var resultaten jämnt fördelade över hela skalan på testet.

Flera framhöll också att de hösten 1998 hade kunnat observera en nedgång (av medianvärdena) i resultaten på förkunskapsproven. Det fanns röster som på grund av detta varnade för vad som skulle komma till högskolan om några år.

Kursstrukturen i gymnasieskolan.

Många tog upp den nuvarande strukturen och poängsättningen på matematikkurserna på NV-programmet, där kurs Ma A ansågs ha ett alldeles för stort poängtal och framför allt kurserna Ma C och Ma D har ett för litet. Även om man lokalt kan flytta undervisningstimmar från kurs Ma A till kurserna Ma C och Ma D, blir det komplikationer eftersom poängvärdet på en kurs också ger kursens vikt vid antagning till högskolestudier. Det gavs också exempel på vad detta kan föra med sig. En elevreplik: *Hur lite får man kunna på matematik D och ändå få betyget G? Om jag skall få ett bra medelbetyg så måste jag satsa så mycket som möjligt på andra (och "lättare"?) kurser.*

Ett problem var också att kurssystemet hackar sönder ämnet och att det inte finns utrymme för syntes i utbildningen. Varje kurs börjar på något nytt och det är inte riktigt "comme il faut" att öva mera på områden som behandlats i tidigare kurser där eleven redan fått sitt betyg.

Från flera håll framfördes att de olika gymnasieprogrammen borde ha olika matematikkurser.

Det gavs också exempel på hur kurssystemet anpassats till elevernas förkunskaper och förutsättningar genom nivåindelning och fartdifferentiering i matematikundervisningen i gymnasieskolan.

Stoffträngsel

Både gymnasielärare och högskolelärare ifrågasatte om inte det totala kursinnehållet i matematikkursen på NV-programmet var för stort. Man diskuterade vad detta berodde på. Var det kursplanerna som var för ambitiösa eller var det läroboksförfattarna som gjorde en ”för ambitiös” tolkning?

Matematikens ställning i gymnasieskolan

Många gav exempel på speciella åtgärder som gjorts i olika skolor för att förbättra utbildningen – inte minst så att de duktigare eleverna skulle få en mer stimulerande utbildning. Men ändå flera vittnade om en känsla att matematik inte betraktades som ett viktigt ämne i utbildningen. Det var andra utbildningsresultat som räknades. Vissa inlägg gav ett intryck av frustration över situationen. Många efterlyste ett bättre stöd för matematikämnet från skolledning och skolpolitiker. Samtidigt visade många av gymnasielärarna i matematik en stor beredvillighet att bidra till en förbättring av situationen om bara de yttre förutsättningarna funnes.

Antagningsreglerna

Kursstrukturen och betygen hänger naturligtvis samman med hur betygen och kurs-poängen används. Många hade synpunkter på det stora, och ofta skadliga, inflytande som högskolans antagningssystem har och ifrågasatte bl.a. det rimliga i att tidiga kurser ges en så stor betydelse för antagningen som idag. Det fanns också tankar på en viktning i förhållande till svårighetsgraden.

En annan fråga som flera tog upp var de nuvarande behörighetskraven. Framförallt gällde det Högskoleingenjörsutbildningen där kravet är betyget G på kurs Ma D i matematik. Det hävdades att ett krav på betyget VG skulle vara mer adekvat. Varför behöver inte blivande ingenjörer ha gått kurs Ma E, vilket ju gäller för dem som skall bli civilingenjörer?

En mera generell effekt av dagens antagningssituation till högskoleutbildningar är den ökande betygsjakten hos många elever. Möjligheterna att få höga betyg styr i hög grad elevernas val och deras attityder till undervisningen.

Fortbildningssituationen

Många gymnasielärare ville ha större möjligheter till fortbildning i matematik och matematikdidaktik. Man menade att de senaste årens fortbildningsinsatser till allra största delen gått till mer övergripande frågor. Någon efterlyste en satsning på gymnasielärare och högstadielärare i matematik liknande den som för ett antal år sedan gjordes för lärare på låg- och mellanstadiet.

Läroarbetsutbildningen

Flera deltagare hade stora farhågor för vad de svaga förkunskaperna kan komma att betyda för grundskolläroarbetsutbildningen. Tidigare var de som sökte sig till läroarbetsutbildningarna intresserade och duktiga i matematik. Numera är studen-

terna på grundskollärautbildningarna de som i genomsnitt har de allra lägsta resultaten på förkunskapstesten.

Det framfördes också förslag om en närmare anknytning av vissa lärarutbildningar till ingenjers- eller civilingenjersutbildningarna.

Högskolesituationen

Från högskolesidan gavs exempel på olika åtgärder och försök som gjorts för att förbättra studieresultaten både kvantitativt och kvalitativt (se också nedan). Men det fanns också kritik från studenter mot högskoleundervisningen. ”*Tänk om från början, skrota storföreläsningar*” etc.

Någon frågade hur det var med genusperspektivet i högskolan. Varför skrämde man bort kvinnorna från matematiken?

Övrigt

En rad andra synpunkter förekom också. Många matematiklärare både från gymnasieskola och från högskoleområdet betonade vikten av att matematik-kunskaperna hos elever/studenter fördjupas och att man måste komma bort ifrån den formella och ytliga inlärning som förekommer alltför ofta. Vilka krav detta ställer på undervisningssituationen och på lärarrollen diskuterades.

Högskoleutbildningen i matematik

Under bedömningsgruppens hearings behandlades i första hand situationen i gymnasieskolan. En bild av läget inom högskolan ges bl. a. av den utvärdering av den grundläggande matematikutbildningen vid svenska universitet och tekniska högskolor som under åren 1994–1995 genomfördes på Universitetskanslerns uppdrag. Vidare har bedömningsgruppen riktat en förfrågan till universitet och högskolor. Dessutom har Anders Tengstrand och Tomas Larfeldt på NyIng:s uppdrag gjort en kartläggning av utvecklingsprojekt vid civilingenjers- och ingenjersutbildningar.

Detta material, samt annan information som gruppen tagit del av, visar på en splittrad bild: Å ena sidan pågår ett mycket omfattande försöks- och utvecklingsarbete, men å andra sidan drivs huvuddelen av matematikundervisningen vid våra universitet och högskolor fortfarande på ett traditionellt och konventionellt sätt med ett stort utrymme för förbättring.

1995 års utvärdering

Syftet med utvärderingen var att få en uppfattning om nivån på den svenska grundutbildningen i matematik i ett internationellt perspektiv och att belysa matematikutbildningens relevans i förhållande till samhällets behov av kompetens inom matematikområdet. Därutöver skulle projektet ge underlag för de enskilda institutionernas/lärosätenas åtgärder för att utveckla utbildningarna. Dessutom skulle projektet bidra med metoder och erfarenheter för liknande

utvärderingar inom andra discipliner och områden.

Utvärderingen bestod dels av institutionernas egen analys och värdering av sin verksamhet dels av en internationell expertgrupps bedömning av verksamheten.

Expertgruppen konstaterade i sin rapport¹⁶ att det fanns många positiva sidor av matematikutbildningen i Sverige. Samtidigt gjorde man en rad rekommendationer:

”...

- *Det är angeläget att institutionerna startar en intern målsättningsdiskussion i vilken hela matematikundervisningen, från de stora linjerna till de enskilda detaljerna fokuseras. Det skulle vara av värde om de enskilda institutionerna i högre grad än nu arbetade på att skapa sin egen profil baserad på de förhållanden och starka sidor som finns vid institutionen. Enligt vår uppfattning skulle det vara en styrka snarare än en svaghet för svensk matematikutbildning om traditionella strävanden att skapa homogenitet balanserades av ambitionen att ta till vara de kvaliteter som finns inom de enskilda institutionsmiljöerna.*
- *Antingen institutionerna engagerar sig i mer övergripande förändringsprojekt eller väljer en mer gradvis utveckling av de befintliga utbildningsprogrammen finns det behov av ett löpande förbättrings- och utvecklingsprogram för undervisningen. Detta behov gäller inte endast undervisningens form utan även de faktiska genomförandet och därmed också pedagogiska metoder.*
- *Det bör organiseras ramar inom institutionerna som stimulerar kollegialt samarbete, erfarenhetsutbyte etc. med syftet att öka det kollektiva engagemanget och skapa fora för kollegialt stöd. Försök med team-undervisning bör genomföras.*
- *I undervisningen bör exempel från andra ämnen i studenternas utbildning inkluderas. För att detta skall kunna ske fordras att matematiklärarna har en god orientering i den undervisning som ges i närliggande ämnen. Interdisciplinära lärargrupper bör organiseras för att regelbundet diskutera och uppdatera lämpliga exempel.*
- *Sambandet med numerisk analys, matematisk statistik, datalogi etc. bör stärkas.*
- *Seminarier/kurser i matematisk modellering bör organiseras efter det första studieåret. För att medverka till att presentera relevanta problem i dessa kurser bör lärare från andra ämnen engageras.*
- *Moment som stimulerar och tränar studenterna i muntlig och skriftlig framställning bör ökas. Muntliga tentamina bör prövas på fler ställen än Lund.*
- *Doktorander och studenter som medverkar i undervisning bör systematiskt ges förberedande pedagogisk utbildning och fortlöpande handledning av mer erfarna lärare.*
- *Professorer bör regelmässigt medverka i den grundläggande utbildningen.*
- *Lektorer bör ges ökade möjligheter till egen forskning.*

¹⁶ Nationell utvärdering av grundutbildningen i matematik. Universitetskanslern. Kanslersämbetets rapport 1995.5.

- *Institutionerna bör medverka aktivt till att studenter deltar i internationellt utbyte och studerar matematik vid utländska universitet.*
 - *Institutionerna bör på olika sätt vidta åtgärder som stimulerar till ökad rekrytering av kvinnliga studerande på alla nivåer.*
 - *Program som syftar till att utbilda matematiker för näringsliv och offentlig förvaltning av det slag som utvecklats i Göteborg och som förbereds i Lund bör övervägas vid samtliga universitet och högskolor.*
 - *Gymnasielärarutbildningen bör ses över så, att framtida gymnasielärare får en ämnesteoritisk kompetens i paritet med vad som gäller i övriga Europa.*
-”

Det bör påpekas att utvärderingen bara gällde verksamheten vid universiteten och de tekniska högskolorna. Matematikutbildningen vid de mindre och medelstora högskolorna behandlades inte. Inte heller den nya högskoleingenjörsutbildningen eller grundskollärarutbildningen fanns med i underlaget för utvärderingen.

En förfrågan till universitet och högskolor

Som ett led i bedömningsgruppens arbete sändes en förfrågan ut till samtliga universitet och högskolor som har undervisning i matematik med några olika frågor. Svar inkom från ca femton lärosäten. En majoritet av dessa hade någon typ av förkunskapsprov för de nya studenterna. Många av de svarande uttryckte också explicit att de tyckte att förkunskaperna hade blivit sämre.

De flesta av de lärosäten som svarade hade en speciell inledande kurs som i första hand övade delar av gymnasiets matematikkurs.

En fråga gällde om man prövat ”icke-konventionella” undervisningsformer m.m. inom ämnet matematik. Det visar sig att de flesta av de institutioner som besvarat förfrågan gjorde eller hade gjort försök med nya former för undervisningen i matematik för att ge stöd till de studenter som hade speciella svårigheter med ämnet, eller för att utveckla och fördjupa inlärningsresultatet.

Praktiskt taget alla lärosäten rapporterade om olika mer eller mindre omfattande samarbetsprojekt mellan matematikinstitutioner och matematiklärare vid gymnasieskolor. Det kunde vara lärardagar eller gemensamma matematikdidaktiska seminarier m.m.

En kartläggning av utvecklingsprojekt för civilingenjör och ingenjörutbildningar

En samlad bild av allt som görs för att utveckla matematikundervisningen vid svenska universitet och högskolor kan inte göras här men för att ge några exempel på vad som görs ges här några citat ur en kommande rapport inom NyIng-projektet¹⁷ om det pågående utvecklingsarbetet av matematik-

¹⁷ NyIng-rapport nr 13.

utbildningen vid ingenjör- och civilingenjörsutbildningar som gjorts av Anders Tengstrand¹⁸.

Tengstrand framhåller att det vid alla högskolor, finns en vilja till förnyelse samtidigt som man naturligtvis vill slå vakt om det positiva i den traditionella uppläggnings av matematikundervisningen. Men trots viljan till förnyelse återstår många problem. Mor bakgrund av en intervjuundersökning av hur några kvinnliga studenter vid KTH uppfattar sin psykosociala miljö konstaterar Tengstrand.

”....

När det gäller undervisningsmiljön finns några negativa synpunkter som förmodligen delas av ett stort antal studenter vid många högskolor. Exempel på sådana synpunkter är följande:

- *Undervisningsgrupperna är för stora.*
- *Det är för mycket teori och för litet valmöjligheter under de första åren.*
- *Många lärare upplevs som opedagogiska.*
- *Tempot är för hårt och man känner sig sällan i fas med undervisningen.*

....”

Under rubriken *övergången mellan gymnasium och högskola* skriver Tengstrand bl.a.

”.....

Under de två senaste åren har de varit en intensiv debatt kring studenternas matematiska förkunskaper. En förändrad gymnasieskola kombinerat med en ökning av studentantalet har inneburit en ny situation för högskolans matematiklärare. Många högskolor har själva tagit kontakt med gymnasieskolan för ömsesidigt informationsutbyte. Ofta har man startat årligen återkommande överläggningar mellan högskolans och gymnasieskolans matematiklärare.

De flesta högskolor ger och har sedan länge givit en introduktionskurs där man under någon eller några veckor repeterar gymnasieskolans matematikkurs. Man har också låtit studenterna genomgå någon form av förkunskapsprov.

..... Vid en del högskolor har man genom speciella åtgärder velat fästa studenternas uppmärksamhet på betydelsen av att behärska de delar av gymnasiekursen som är av betydelse för högskolestudier. Efter den inledande repetitionskurser ges olika former av test på gymnasiematematiken och goda resultat på dessa ger bonus på någon eller några ordinarie tentamina. Vid Dalarnas högskola ingår repetition av gymnasiekursen tillsammans med inledande delar av högskolematematiken som poänggivande del i en kurs som kallas Ingenjörrens verktyg.

....”

Ett stort antal projekt sammanfattar Tengstrand under rubriken *matematikstudier med ökat studentansvar*:

¹⁸ Projektet påbörjades våren 1998 av Tomas Larfeldt men måste hösten samma år avbrytas p.g.a. sjukdom. Anders Tengstrand övertog då arbetet.

”.....

...Många högskolor har på ett systematiskt sätt arbetat med att ändra undervisningen så att studenterna aktiveras. Vid Luleå tekniska universitet experimenterade man tidigt med arbete i smågrupper. Matematikprojektet vid Chalmers 1992–93 var ett annat försök att arbeta med nya undervisningsformer. Läsåret 1997–98 inleddes ett projekt vid matematiska institutionen vid Uppsala universitet för att med minskade resurser ändra undervisningsformerna med syfte att åstadkomma mer ”studerande” och mindre ”undervisande”. Det stora projekt som genomförts vid Mälardalens högskola kallas just Matematik med ökat studentansvar och ny lärarroll.

....”

Sättet att examinera påverkar naturligtvis sättet att lära sig:

”.....

De flesta matematikkurser vid landets universitet och högskolor examineras genom en skriftlig sluttentamen med ett antal problem. Men det blir allt vanligare att det traditionella slutprovet kombineras med andra examinationsformer bl. a. förekommer olika former av muntlig examination.

....”

Ett av de förslag som kom från den internationella utvärderingen gällde rekryteringen av fler kvinnor till matematiken. Konkreta åtgärder prövas också på flera håll:

”.....

En rad försök har gjorts för att rekrytera fler kvinnor till teknisk utbildning. Det har ofta fått konsekvenser för utformningen av matematikundervisningen. Vid några lärosäten ger man utbildningar som är öppna enbart för kvinnor. Sådana ges bl.a. vid Luleå tekniska universitet, Växjö universitet och Högskolan i Karlskrona/Ronneby. I de båda senare fallen ansvarar EC-gruppen i Svängsta för utbildningen och en stor del av studenterna har varit kvinnor med arbetslivserfarenhet. I samtliga tre utbildningar har stor vikt lagts vid att befästa gymnasiekunskaperna i matematik.

...”

8. Situationen i andra länder

Ett universellt problem

Bedömningsgruppen har av tidskäl inte haft möjlighet att på ett mer systematiskt sätt inhämta information om läget i andra länder. Den har ändå fått många tydliga tecken på att det inte endast är i Sverige som problemet med bristande förkunskaper i matematik och svårigheterna vid övergången till högskolestudier har uppmärksammats. Företrädare för högskolor i andra och med Sverige jämförbara länder uttrycker sig på samma sätt som svenska matematiklärare och man har vidtagit analoga åtgärder som exempelvis att inrätta propedeutiska kurser. De problem som man framförallt nämns är de försämrade räknefärdigheterna.

Ett tydligt exempel är den engelska rapporten från 1995, *Tackling the Mathematics Problem*¹⁹, där det i sammanfattningen bl. a. framförs:

”.....

There is unprecedented concern amongst mathematicians, scientists and engineers in higher education about the mathematical preparedness of new undergraduates.

...

Recent changes in school mathematics may well have had advantages for some pupils but they have not laid the necessary foundations to maintain quantity and quality of mathematically competent school leavers and have greatly disadvantaged those who need to continue their mathematical training beyond school level.

The serious problems perceived by those in higher education are:

- i A serious lack of essential technical facility – the ability to undertake numerical calculations with fluency and accuracy;*
- ii A marked decline in analytical powers when faced with simple problems requiring more than one step;*
- iii A changed perception of what mathematics is – in particular of the essential place within it of precision and proof.*

International comparisons confirm many of these perceptions and also indicate what other countries have achieved.

....”

Ett annat exempel kan hämtas ur den nyligen genomförda gemensamma tysk-svenska utvärderingen av civilingenjörsutbildningen i maskinteknik vid fem svenska tekniska högskolor samt Rostock och Hamburg-Harburg.²⁰ Där anförs bl.a.

¹⁹ *Tackling the Mathematics Problem*. London Mathematical Society, Institute of Mathematics and its Applications, Royal Statistical Society. (1995).

²⁰ *Quality Review MSc-Programmes in Mechanical Engineering*. Chalmers, Göteborg (1998).

”.....

All universities in the Review claimed that their students do not have sufficient knowledge of mathematics when entering the university. There was in fact an unanimous opinion among teachers in mathematics that an essential cause for drop-outs and for the generally low pass-rates in mathematics – on which much of the time of discussion was spent – is the continuously decreasing skills in mathematics of the entering students over the past twenty years.

Some universities give remedial courses in mathematics to repeat the Secondary school mathematics before starting the studies and other efforts are made to help those students who are weak in mathematics. The Peer Group supports these measures even though they are hardly sufficient to solve the problems encountered.

It could be argued that the problem has its roots in the Secondary school- system and that it should be solved there, but universities cannot just blame the preceding stage and wait for a miracle; they must adapt their courses and their methods to suit those students that they can recruit. This does not of course mean that they should refrain from criticising the Secondary school system, but a more fruitful attitude could be to initiate a continuous discussion with the teachers in mathematics in Secondary schools in order to find a balanced solution to the problem for all three parties; University, Secondary school and students.

The Peer Group recommends:

- *The mathematics courses must be adapted to the actual level of knowledge of the entering students even if this in some cases means that more time has to be allotted to fundamental mathematics in order to reach the necessary level.*
- *Simple modelling should be included in the mathematical courses.*
- *More interaction between teachers in mathematics and teachers in technical subjects is needed.*
- *It may be fruitful to spread out the mathematical courses over the first two years.*

.....”

Rapporter från andra tyska universitet och Fachhochschulen ger en motsvarande bild och tyder på att problemen inte är begränsade till Rostock och Hamburg. En faktor som man särskilt pekar på är den ökande spridningen av förkunskaperna.

De försämrade förkunskaperna skapar också oro och diskuteras även i ett land som Frankrike trots (eller kanske på grund av) den starka ställning som matematiken hittills haft i det franska skolsystemet.

Bedömningsgruppens slutsats av ovanstående exempel och av andra vittnesbörd är att de problem som observerats är gemensamma för många länder. De svenska studenternas bristfälliga förkunskaper kan inte förklaras enbart genom hänvisning till specifikt svenska förhållanden.

Svenska elevers matematikkunskaper i en internationell jämförelse

De jämförelser av matematikkunskaperna i olika länder som gjorts på senare år ger en splittrad bild.

De internationella jämförelser av 13-åringar och 19-åringar som gjorts inom ramen för TIMMS-projektet²¹ visar, i förhållande till tidigare undersökningar, på en förbättring för svenska gymnasister jämfört med utländska jämnåriga. Däremot är resultatet sämre på det matematiktest som gavs de svenska NT-eleverna i gymnasiets avgångsklass. Svagheter fanns framförallt på uppgifter som omfattar algebra/derivata/integraler och geometri, uppgifter som testar matematiska begrepp, metoder och färdigheter utan direkt koppling till tillämpningar.

Till saken hör att undersökningen gjordes bland gymnasister som gått i det tidigare linjegymnasiet. Man vet inte hur resultaten skulle ha varit för dagens elever från programgymnasiet. I gymnasieundersökningen deltog inte heller en rad länder som tidigare hade visat sig ha goda resultat i 13-års undersökningen.

I TIMMS-projektet finns också resultat som pekar på att svenska elever, både i grundskolan och i gymnasieskolan ägnar mindre tid åt hemarbete än man gör i andra länder.

I den senaste upplagan av *Education at a glance*²² redovisas resultat från IALS-undersökningen (*International Adult Litteracy Survey*) från sammanlagt 12 länder. Testet mäter förmågan att klara av intellektuella uppgifter som man möter i vardagslivet (t ex kunskaper och färdigheter som krävs för att leta upp och använda information i form av kartor, tidtabeller etc.). Resultaten redovisas på en skala från 1 till 5, där minst nivå 3 anses vara önskvärd för den som skall klara sig utan svårigheter i det sociala och ekonomiska livet i ett modernt demokratiskt samhälle. I Sverige har 75 procent av befolkningen i åldern 16–65 år fått ”betyget” 3 eller mer, vilket är mer än i något annat land bland dem som genomfört testet. Trots detta kan man konstatera att var fjärde svensk riskerar att få svårigheter i det medborgerliga livet på grund bristande kunskaper bl.a. i matematik (i vid mening).

Sveriges ”försprång” framför övriga länder som deltagit i testet beror framförallt på de höga testresultaten för de äldre åldersgrupperna i Sverige. Den yngsta gruppen (16–25 år) i Sverige har ett något bättre resultat än befolkningen totalt (80 procent på nivå 3 eller högre) men differensen i denna åldersgrupp till de efter Sverige bäst placerade länderna är relativt liten.

²¹ TIMMS Rapport 145 Skolverket, Stockholm (1998).

²² *Education at a Glance*. OECD Indicators. Centre for educational research and innovation OECD. (1998)

9. Lägesbeskrivning

Enligt vår mening är den nuvarande situationen beträffande studenternas förkunskaper otillfredsställande. Vi konstaterar att

- Förkunskapsnivån i matematik hos dem som börjar studier inom naturvetenskap och teknik är starkt varierande.
- Det hos många studenter finns tydliga brister, inte bara när det gäller räknefärdigheten i snäv mening, utan också beträffande det som man kan kalla matematisk mognad.
- Undervisningen vid universitet och högskolor inte alltid är anpassad till den nuvarande situationen vad gäller förkunskaperna i matematik.
- Åtskilliga studenter har så svaga förkunskaper att det kan bli svårt för dem att tillgodogöra sig den undervisning i matematik som ges vid universitet och högskolor, så som den är utformad idag.
- Dagens utbildning i matematik i Sverige ger både goda och mindre goda resultat jämfört med andra länder.

Vi konstaterar också att behovet av kunskaper i matematik kommer att bli större i framtiden än idag. Det finns för de närmaste åren planer på att bygga ut högskoleutbildningen inom naturvetenskap och teknik med cirka 5000 nybörjarplatser. Redan idag finns indikationer på att genomströmningen framförallt inom högskoleingenjörsutbildningen är låg och på väg nedåt. Det är också svårt att finna studenter som vill utbilda sig till matematiklärare i grundskolan.

Till detta kommer att den allmänna samhällsutvecklingen innebär ökande krav på matematikkunskaper för alla människor.

Slutsatsen är att man inte kan slå sig till ro med dagens situation.

Vad kan och bör göras?

Det finns goda förutsättningar för att man skall kunna göra förbättringar, men det finns inte någon metodisk kungsväg som i ett slag skulle kunna vända allt till det bättre. Det behövs i stället ett helt paket med olika åtgärder under lång tid och på olika nivåer i systemet.

Det går inte att utgå från att den ”vanliga” matematikundervisningen i fortsättningen skulle kunna fungera ungefär som idag och att det bara behövs några speciella åtgärder för dem som skall fortsätta med studier i naturvetenskap teknik och liknande ämnen. Vi menar att grunden för en del av dagens problem i övergången mellan gymnasieskola och högskola står att finna i matematikutbildningen längre ner i skolsystemet.

Det behövs alltså förbättringar på alla nivåer i utbildningssystemet –

förbättringar som kan komma alla elever/studenter tillgodo. Detta är också en förutsättning för att på lång sikt komma till rätta med det speciella problem (övergången från gymnasieskola till tekniska och naturvetenskapliga högskolestudier) som det är vår huvuduppgift att studera.

Ett förbättringsarbete måste innehålla både mer kortsiktiga åtgärder, för att lösa de akuta problemen, och en mer långsiktig strategi för att få en igång en utveckling som kan möta de ökade kraven på matematikkunskaper i framtiden – krav både på fler ”specialister” (naturvetare och tekniker) och på bättre matematikkunskaper för generalisterna d v s hela befolkningen.

I det följande redovisas en rad olika åtgärder som tillsammans skulle kunna ge en bättre utveckling. Det är åtgärder som kräver engagemang från många olika nivåer. Det gäller matematiklärarna (både i skolan och i högskolan) som är centrala i systemet, det gäller också studenter och elever. Men det gäller också i hög grad skolledningarna och skolhuvudmännen inom skolan och institutioner, fakulteter och högskoleledningar inom högskolesektorn. Det är ju dessa som ger de ramar som matematiklärarna och eleverna har för sitt arbete. Det gäller också Skolverket som är ansvarigt för läroplaner och andra styrdokument. Men det gäller också i hög grad regering och riksdag som bl.a. har ansvaret för reglerna för antagningen till högskolestudierna och studiefinansieringen, som också är viktiga styrfaktorer. Möjligheten till framgång för ett förändringsprogram beror bl.a. på om alla dessa aktörer kan fås att dra åt samma håll.

10. Människorna

Utbildning handlar om människor

All utbildning handlar ytterst om människor. Det är eleven/studenten som förväntas få nya kunskaper färdigheter och erfarenhet. Det är också läraren som på olika sätt kan underlätta (och kanske också styra) lärprocessen. För detta finns hjälpmedel (läromedel, utrustning m.m.) som kan användas på ett mer eller mindre effektivt sätt.

Men det finns också ramar som ger begränsningar för elevernas och lärarnas handlande. Det gäller naturligtvis den enskilde elevens/studentens situation socialt, ekonomiskt och mänskligt, men också de olika systemen dvs läroplaner och andra centralt eller lokalt fastställda styrdokument samt andra regler som kan påverka elevens (eller lärarens) handlande.

Mot denne bakgrund har vi delat upp diskussionen av de olika åtgärder som kan behövas i två avsnitt. Detta kapitel handlar om människorna. Första delen ägnas åt eleverna/studenterna och förutsättningarna för deras lärande av matematik. Därefter behandlas lärarna och deras roll, utbildning och arbetsvillkor. Nästa kapitel handlar om systemen, deras effekter på utbildningssituationen, och om vad som skulle kunna förändras i dem.

Eleverna /studenterna

Matematikutbildning för vem?

Det finns skillnader i förmågan att lära sig matematik. För vissa elever/studenter går det lätt att lära sig ett visst matematikmoment, för andra kan det vara svårare. En inte ovanlig slutsats av detta är att matematikutbildning över en viss nivå egentligen bara skall ges till studerande med vad som brukar kallas ”särskild fallenhet för ämnet”. Detta strider mot vår uppfattning. Vi menar för det första att fallenhet för ämnet inte är något fixt. De kunskaper som en student/elev kan tillgodogöra sig på en rimlig tid beror inte bara på medfödda egenskaper, utan också på tidigare inhämtade kunskaper i matematik och på undervisningens anpassning till dessa och i hög grad på motivation och självtillit. Vi menar också att vi inte har råd i vårt land att enbart utbilda en elit i mer avancerad matematik. Utgångspunkten bör istället vara att alla elever/studenter oavsett fallenhet kan och också bör få möjligheter att lära sig mer matematik än de gör idag.

Ett annat argument som man kan se ibland är att ”vanliga människor” bara behöver lära sig det praktiska livets matematik. Bara de som skall syssla med naturvetenskap och teknik har nytta av mera matematik. Vi håller inte heller med om detta. Vi menar istället att allting talar för att i det framtida samhället är det för alla av värde med bättre kunskaper i matematik än i dag. Därför menar

vi att en första utgångspunkt för den framtida utvecklingen av matematikämnet i såväl skola som högskola skall vara att alla grupper av studerande skall få möjligheter att, inom ramen för rimliga arbetsinsatser, lära sig mera matematik än idag.

Öka intresset för matematikkunskaper och matematikstudier

Många undersökningar visar att barnen i de lägsta klasserna i grundskolan tycker att matematik är intressant och roligt. Denna inställning finns inte kvar i någon större utsträckning i de högre årskurserna i grundskolan. Det finns naturligtvis flera förklaringar till detta. Klart är dock att det är en pedagogisk utmaning att kunna bevara det intresse som finns bland de mindre barnen. Om man kan åstadkomma det skulle säkert många andra problem bli betydligt lättare att lösa. Vi menar också att målet att matematikutbildningen skall skapa intresse för matematikämnet bör betonas mera än idag i den framtida utbildningen. Ett viktigt mål för ett utvecklingsarbete bör därför vara att utbildningen skall upplevas som intressant och stimulerande för alla elever/studenterna.

Anpassning till elevernas/studenternas varierande förutsättningar

En förutsättning för att en utbildning skall vara stimulerande och intresserivande är att den är anpassad till den enskilde studerandes situation och förutsättningar.

Utbildning i matematik är ofta kumulativ. De olika avsnitten bygger på varandra i större grad än i de flesta andra ämnen. Det finns vissa moment (kanske i första hand då det gäller begreppsförståelse och metodkunskaper) som man bör känna till och behärska någorlunda innan man med framgång kan gå vidare till nästa område. Det finns en "lägsta" nivå på kunskaperna inom ett visst område utan vilka det blir svårt att gå vidare i matematikstudierna. Om man ändå fortsätter går inlärningen successivt allt trögare. En elev eller student kan inte ägna sig åt det nya som han eller hon skall lära sig utan distraheras av svårigheter som rör rutinuppgifter i ett tidigare avsnitt. Risken är då att inlärningen av det nya området inte kan ge förståelse och mognad utan att eleven allt mer begränsar sig till ett mekaniskt lärande av scheman och metoder utan sammanhang med varandra. I det långa loppet är detta kontraproduktivt.

Förutsättningar för att lära sig matematik varierar vidare från person till person. Detta beror på en rad faktorer som hänger ihop med den enskilde studentens/elevens och hennes/hans individuella situation. Det betyder att elever/studenterna på samma tid kan nå olika långt i sina matematikstudier.

Mera konkret innebär detta att utbildningen och studierna måste kunna organiseras så att studietakten inte är för snabb för de elever/studenterna som behöver längre tid på sig, samtidigt som den inte är så långsam eller "elementär" att andra elever/studenterna tycker den är tråkig. Målet måste vara att utbildningen upplevs som en "lagom" utmaning för *alla* elever/studenterna. Detta ställer speciella krav både på de yttre ramarna och på organisationen av utbildningen samt på pedagogiken och metodiken i undervisningen.

Situationen kompliceras ytterligare i dagens system av den stora spridningen i förkunskaper från föregående nivå. Detta gäller, som redan nämnts, förkunskaperna från gymnasieskolan för dem som börjar inom högskolan, och också, förkunskaperna från grundskolan för dem som börjar i gymnasieskolan.

Variation av studietakten

Ett sätt att hantera de problem som beskrivs ovan är att inom ramen för en och samma kurs variera studietakten för elever/studenten. Detta kan också kombineras med variationer i lärarinsatsen beroende på elevernas förutsättningar.

I *grundskolan* förekommer på många håll idag att undervisningen är organiserad i grupper utifrån nivån. Det gäller på högstadiet, ibland från åk 7, ibland från åk 8, och ses av många lärare och skolledare som en möjlighet att realisera läroplanens mål om individualisering. Mer lärarresurser kan ägnas åt de svagaste eleverna som kan gå i en liten grupp. Grupperna är oftast flexibla och nivåerna ofta tre eller fyra.

I den nya *gymnasieskolan* har de enskilda skolorna fått möjlighet att anpassa undervisningstiden på de olika kurserna efter elevernas bakgrund och studieförutsättningar. Det är oklart i vilken mån som detta kan utnyttjas utifrån den enskilda elevens situation. Frågan är också om inte skolbetygens roll i samband med antagningen sätter en spärre för alltför stor individualisering i undervisningen (se vidare kapitel 11).

En anpassning av undervisningstiden till elevernas bakgrund och förutsättningar har i praktiken skett beträffande kursen Ma A i gymnasieskolan, där vissa skolor har avsatt mindre antal timmar för undervisningen av de elever som går NV-programmet än för elever på andra program. Tyvärr verkar det som om de ”insparade” timmarna inte alltid har använts för undervisning på andra kurser i matematik (kurs Ma B - Ma E) utan istället för förstärkningar i andra ämnen²³.

På flera håll vid *universitet och högskolor* förekommer också försök med inriktning mot en mer differentierad studietakt: Inledande kurser införs, eller utvidgas. Det förekommer också försök med helt individualiserad studietakt.

Det finns alltså försök på de olika nivåerna i utbildningssystemet med variationer av studietakten och lärarinsatsen i matematikundervisningen. Men huvudintrycket är dock att man av många skäl är tvingad eller har valt att arbeta med sammanhållna undervisningsgrupper och enhetlig studietakt. Detta leder fram till stora variationer i utbildningsresultaten. Vi menar att utbildningen bör organiseras så att de studerande på alla nivåer (grundskola, gymnasieskola, högskola) i större utsträckning än nu kan läsa i en takt som passar deras individuella förutsättningar.

I den mån dagens studiemedelsbestämmelser sätter hinder i vägen för en mer genomgripande differentiering av studietakten i utbildningen på högskolenivå bör dessa bestämmelser ändras (se vidare kapitel 11).

²³ *Naturvetenskapsprogrammet. Basrapport från utvärderingen av gymnasieprogram 1997*. Skolverket, Stockholm (1998).

Variation av kursinnehåll.

Att variera undervisningstiden och studietiden på en kurs i relation till elevernas/studenternas förutsättningar och förkunskaper kan alltså vara en lämplig åtgärd. Men man kan också anpassa utbildningens *innehåll* till elevernas/studenternas förutsättningar och intressen.

I *grundskolan* förekom tidigare efter årskurs 6 en möjlighet till val av allmän respektive särskild kurs i matematik. Numera läser alla elever samma kurs i matematik upp t.o.m. kurs A i gymnasieskolan.

Dagens *gymnasiekurs* i matematik är hierarkisk uppbyggd (med undantag för den lokalt inrättade kursen Ma F). Den som har läst Ma C och vill läsa vidare har bara Ma D med dess inriktning mot fortsatta studier i analys att välja på. Det finns vissa övergripande motiv för denna konstruktion, men för de elever som är mer datainriktade kan det exempelvis vara mer lämpligt med en kurs i diskret matematik. Det finns också goda erfarenheter av valbara matematikkurser (Ma F och Ma G) i gymnasieskolan med mera okonventionellt kursinnehåll.

Inom de olika *högskoleutbildningarna* har andelen alternativa kurser ökat något under senare år, bl. a som en följd av införandet av nya utbildningar. På vissa datainriktade utbildningar har kurser i diskret matematik kommit in som en av de första matematikkurserna. Även i ingenjörsutbildningarna och lärarutbildningarna har nya kurser introducerats. Men i stort är uppläggningsen av de inledande kurserna för naturvetare och teknologer den traditionella med kurser i en- och flervariabelanalys och i linjär algebra. Vidare läser alla studenter inom samma program samma inledande matematikkurs. Vanligtvis är också de inledande kurserna gemensamma för flera program.

Vi är inte övertygade att den nuvarande konformiteten i valet av kursinnehåll är nödvändig. Skälen för att alla skall läsa samma kurser är dels ekonomiska, dels att studenterna ska ha valfrihet i senare årskurser. Men dessa argument måste ställas mot önskemålet att varje student får kurser som är avpassade efter hans/hennes förutsättningar. Som vi kunnat konstatera är variationerna i förkunskaper stora. Om man inför större valmöjligheter för elever och studenter, kan man sannolikt vänta sig att studieresultaten blir bättre vad avser det som vi tidigare har kallat matematisk mognad.

Vi är helt på de klara med att vissa delar av matematiken ibland kan uppfattas som nödvändiga för ett visst tillämpningsområde inom teknik och naturvetenskap, men det behöver inte innebära att man uppfattar det som något positivt att alla gymnasister och högskolestudenter läser och har läst samma matematikkurs.

Vi tycker därför att de möjligheter som man har att i gymnasieskolan och högskolan arbeta med alternativa kurser borde kunna utnyttjas mer än de gör idag. I den mån olika regelsystem utgör ett hinder bör dessa ändras.

Elever med behov av särskilt stöd.

Idag betonas i många sammanhang att lärarna skall lägga betoningen på de

elever i skolan som behöver särskilda åtgärder. Inte minst gäller detta elever som riskerar att inte få godkänt betyg. Det är självklar en viktig uppgift att ge alla elever kunskaper som minst svarar mot det som krävs för betyget godkänd. Men samtidigt är risken att man definierar övriga elever som sådana som inte har några problem. ”De klarar sig ändå”. Detta kan i sin tur innebära att dessa lämnas åt sitt öde. Rent konkret kan det innebära att de räknar allt för mycket för sig själva utan lärarkontakt och att de riskerar att bli understimulerade. För många elever kan detta medverka till en onödigt låg ingångsnivå i gymnasieskolan även på NV-programmet, vilket i sin tur leder till sämre resultat på de fortsatta kurserna i gymnasiet. Vi vill betona att inte bara elever med svårigheter i matematik är i behov av särskilda åtgärder. Alla elever bör få en undervisning som svarar mot deras förutsättningar.

Uppföljning av elever/studenten

En anpassning av utbildningen till de enskilda elevernas/studenternas förutsättningar kräver också att man följer upp sina elever/studenten. Detta förekommer både i gymnasieskolan och i högskolan. Man noterar tentamensresultat, tar kontakt med dem som man tror har problem med studierna osv. Men i varje fall högskolorna kan enligt vår mening göra mera.

Att följa upp sina studenter bör vara en naturlig del i kvalitetsarbetet. Lika väl som institutionerna gör ett bokslut och en verksamhetsberättelse bör de årligen redovisa studieresultaten för de studenter som man har haft ”ansvaret” för och också presentera resultaten så att de kan jämföras över åren och, inte minst, vidta de åtgärder som är nödvändiga för att rätta till de brister som finns.

Differentieringsfrågan

Ovanstående diskussion rör olika aspekter på *differentiering* i matematikundervisningen. Det är ett stort problemområde som inte kan behandlas här men vi ansluter oss till Bengt Johansson förslag²⁴ att

”frågan om matematikundervisningens organisation och differentiering (skall bli) föremål för ett allsidigt forsknings och utvecklingsprojekt, som sträcker sig från förskola till högskola och där undervisningens mål, innehåll och form beskrivs och analyseras i relation till den prov- och utvärderingskultur som är så typisk för matematikutbildning.”

Matematiklärarna

Ett viktigt tema i den föregående framställningen har varit: *Ta hänsyn till den enskilde elevens/studentens förutsättningar*. Ett annat tema skulle kunna vara: *Satsa på människorna i systemet*, dvs. på eleverna/studenterna och lärarna. De

²⁴ Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket, Stockholm (1998).

senare är nyckelpersoner. Utan deras engagemang och kompetens kan man inte åstadkomma mycket.

Att undervisa i matematik är en professionell uppgift

Enligt uppgifter bl.a. vid våra hearings, förekommer det att matematik betraktas som ett ämne som alla lärare åtminstone hjälpligt kan undervisa i utan någon speciell utbildning för ämnet. Det gavs också exempel på att matematiklektioner någon gång nästan kunde betraktas som vilopauser för lärare som i övrigt undervisade i ansträngande och tidskrävande ämnen. Detta är naturligtvis olyckligt inte minst mot bakgrund av de problem många elever har i matematikstudierna.

Som skolan ser ut idag och med tanke på att matematikundervisning i någon form förekommer på alla stadier från förskolan till högskolan, kommer det även i framtiden att finnas många lärare som undervisar i matematik enbart som en liten del av sin tjänst. Ofta kanske undervisningen är integrerad med andra ämnen. Trots detta måste man av alla som undervisar i matematik kräva en professionella attityd till uppgiften.

Den ämnesmässiga identiteten

Till de hearings som bedömningsgruppen anordnade kom ett stort antal matematiklärare från hela landet. De var engagerade och många vittnade också om olika initiativ som tagits lokalt för att förbättra och fördjupa undervisningen i matematik. Men det fanns också tecken på en tydlig frustration hos vissa av deltagarna i hearingen. I dagens skola var det andra prioriteringar än elevernas ämnesmässiga kunskaper som dominerade. Detta gällde inte minst inom skolledning och bland skolpolitiker och skolförvaltningar. Det var också svårt att i ett system med arbetslag få förståelse för de problem som var förknippade med matematikundervisningen.

Enligt bedömningsgruppens mening bör inte lärare i matematik lika lite som andra lärare isolera sig från resten av skolan. Men samtidigt är det enligt vår mening viktigt att man som lärare i matematik (eller vilket annat ämne som helst) kan känna en trygghet och styrka i sin ämneskompetens och den ämnesmässiga gemenskapen med andra lärare i samma ämnen. Det bör vara självklart att alla lärare som undervisar i matematik i en skola bör ha möjlighet att samlas kring ämnet och den gemensamma uppgiften att undervisa i matematik. Därför menar vi att matematiklärarna vid en skola eller högskola måste kunna få fungera som grupp inom skolan eller högskolan.

Läraryrollen

Många av de lärare som undervisar i matematik har detta som biämne. Detta är kanske oundvikligt med tanke på att matematikundervisning förekommer på alla stadier inom skola och högskola. Men det är viktigt att inte alla lärare inom en skola eller en högskoleinstitution är sådana biämneslärare. Inte minst för förnyelsen och utvecklingen av undervisningen i matematik är det viktigt

att det också finns lärare som i första hand uppfattar sig just som lärare i matematik.

I dagens svenska gymnasieskola är det kutym att en lärare skall vara utbildad i, och också undervisa i, minst två ämnen. På denna punkt skiljer sig Sverige radikalt från många andra länder. Det finns naturligtvis skäl för detta men det innebär också nackdelar för undervisningen. En lärare som kan koncentrera sig på matematikämnet och som genom sin utbildning har en god kontakt med utvecklingen inom metodik och didaktikforskning blir en stor tillgång för sina kolleger och för sin skola. Det är visserligen i många ämnen av praktiska skäl svårt att ha ettämneslärare, men i matematik, som är ett stort ämne skulle det troligen vara möjligt i många skolor, i första hand gymnasieskolor.

I Bengt Johanssons rapport²⁵ påtalas den stora bristen, för att inte säga frånvaron, i gymnasieskolan av personer som ägnat sig åt matematisk eller matematikdidaktisk forskning. Här är skillnaden stor i jämförelse t.ex. med ett ämne som fysik. Bedömningsgruppen är övertygad om det skulle vara värdefullt för matematikundervisningen om det funnes lärare (lektorer) i gymnasieskolan med erfarenhet av forskning i matematik eller matematikdidaktik. Idag finns endast ett tiotal matematiklektorer. Av dessa har flertalet sin forskarutbildning i andra ämnen än matematik och deras medelålder är hög.

Lärarytbildning

Idag är det trångt i lärarytbildningen. Lärarkandidaterna förväntas bli kompetenta att undervisa i många ämnen. Övergripande frågeställningar måste också komma med i utbildningen. Risken är då stor att måste minska på den ämnesmässiga delen i ett sådant ämne som matematik.

Men det är inte alltid är så lätt som man kan tro att undervisa i matematik. Det räcker inte att vara bäst i klassen. Det behövs kunskaper både i matematik och i matematikdidaktik. Också kunskaper i matematik inom områden som ligger utanför den gällande skolkursen är viktiga för en blivande lärare. Det kan vara områden som generellt ger en större bredd, men det kan också vara delar av matematik som kan ge en större insikt i de pedagogiska problem som man ställs inför som lärare. Detta gäller alla stadier i skolan. Likaså finns det en rad didaktiska problem som är specifika just för matematikämnet och som också måste behandlas i lärarytbildningen. Den lärare som bara kan elevernas kurs och lite till blir inte en bra matematiklärare. Framförallt blir han eller hon inte en lärare som kan ta initiativ till förändringar och förbättringar av matematikundervisningen.

Lärarytbildningen ligger just nu under utredning. De signaler som har kommit från olika intressenter är inte lugnande. Man talar om någon slags enhetslärare som dels skall kunna undervisa på alla stadier, dels ska undervisa i många ämnen. Risken finns att omfattningen av de ämnesteoriska och

²⁵ Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket. Stockholm (1998).

ämnesdidaktiska momenten i utbildningen av blivande matematiklärare kommer att minska ytterligare. Vi menar i stället att det är viktigt för matematikundervisningen att dessa moment får en starkare ställning i den framtida utbildningen av grundskollärare i matematik än de har idag.

En stor del av undervisningen i matematik utförs emellertid av lärare som inte har matematikundervisning som huvuduppgift. Det gäller i de yngsta årsklasserna (åk 1–3) där större delen av matematikutbildningen görs av svenska-SO-lärare, eftersom det är ont om matematik-No-lärare. Bristen på matematik-No-lärare (1–7) har också inneburit att svenska-So-lärare (1–7) tjänstgör som klasslärare på det som tidigare kallades mellanstadiet, dvs. man undervisar även i matematik. Vi menar att det i lärarutbildningen bör ingå kurser i matematikdidaktik och ämneskurser i matematik med lämplig inriktning för alla som kan komma att undervisa i matematik i framtiden (även om de inte formellt skall bli matematiklärare).

I den utvärdering av den svenska högskoleutbildningen i matematik som gjordes på uppdrag av Universitetskanslern påpekade man att utbildningen i matematik för svenska gymnasielärare internationellt sett var kort (i de flesta fall endast 60 poäng). Ett rimligt mål borde vara att den svenska utbildningen av gymnasielärare borde vara likvärdig med den i våra nordiska grannländer. Vi föreslår därför att man bör sträva efter att gymnasielärarna i matematik ska ha en lika gedigen utbildning som i övriga nordiska länder.

Som redan nämnts saknas det i stort sett personer med lektorskompetens i matematik vid de svenska gymnasieskolorna. En orsak till detta kan vara att det inte finns någon naturlig utbildningsväg fram till en lektorstjänst. Därför bör möjligheterna att anordna en särskild lektorsutbildning prövas t. ex. i form av en på lämpligt sätt anpassad licentiatutbildning. Denna skulle eventuellt också kunna anordnas som en fortbildning på distans för redan yrkesverksamma lärare.

Läraryrkesfortbildning

Ännu viktigare än lärarutbildningen är kanske fortbildningsmöjligheterna för dem som redan finns i skolan. Vid våra hearings påpekades att fortbildningsresurserna under senare år i första hand har ägnats åt övergripande frågor, varför den ämnesmässiga och ämnesdidaktiska fortbildningen blivit satt på undantag. Men sådan fortbildning är alldeles nödvändig om man vill utveckla utbildningen i matematik och möta den utmaning som följer av allt fler elever väntas läsa allt mer avancerade kurser i ämnet. Inte minst behövs det fortbildning för de många lärare som ursprungligen inte fått någon matematiklärarutbildning, åtminstone inte för det stadium de undervisar på idag. En annan grupp lärare som borde ges möjligheter till matematikdidaktisk fortbildning är de som undervisar inom högskoleområdet. Många av dem har överhuvudtaget ingen sådan utbildning.

Samverkan mellan gymnasieskolor och högskolor/universitet

Det förekommer på flera håll, mer eller mindre organiserat, samarbete mellan universitetens/högskolornas matematikinstitutioner och gymnasieskolorna. Man ordnar gemensamma seminarier, studiebesök m.m.

Inte minst för de frågor som bedömningsgruppen i första hand skall behandla, nämligen eventuella problem vid övergången från gymnasieskola till högskola är sådana kontakter viktiga. Men även för den enskilde lärarens (på gymnasieskola eller högskola) utveckling i sin yrkesroll är det av stort värde med kontakter med kollegor utanför den egna sfären.

Det samarbete och den samverkan mellan lärare i högskola och i gymnasieskola som i dag finns på olika håll bör byggas ut till hela landet. Ett sätt att förstärka detta kan vara att skapa ett mer organiserat utbyte mellan matematiklärare i högskolan och i gymnasiet. Tidigare förekom ett system med korttidsförordnade gymnasieinspektörer. Detta kunde vara universitetslärare som under en period av två veckor besökte ett antal gymnasieskolor, auskulterade på lektioner och diskuterade med lärarna. Detta system bör återupplivas på en reciprok och samtidigt mer informell basis. Högskolelärare i matematik kan besöka gymnasieskolor och gymnasielärare högskolor för att i båda fallen auskultera och diskutera matematikundervisningen.

Även den av oss föreslagna gemensamma översynen av kursen Ma E (se kap 11) kan ses som en form av samverkan mellan högskola och skola.

Sammanfattning

- Utgångspunkten för den fortsatta utvecklingen bör vara:
 - att alla grupper av studerande skall få möjligheter att, inom ramen för rimliga arbetsinsatser, lära sig mera matematik än idag
 - att matematik och matematikutbildning bör upplevas som intressant och stimulerande av alla elever/studenter.
- I större utsträckning än nu bör grundskolan, gymnasieskolan och högskolan organisera utbildningen så att de studerande kan studera i en takt som passar till deras individuella förutsättningar.
- Både skolan och högskolan bör ge alternativa kurser i matematik anpassade efter elevens/studentens intresse och förutsättningar.
- Inte bara elever med svårigheter i matematik är i behov av särskilda åtgärder. Alla elever bör få en undervisning som svarar mot deras förutsättningar.
- Verksamheten med att följa upp och analysera studieresultaten inom högskolan bör utvecklas.
- Frågan om matematikundervisningens organisation och differentiering bör bli föremål för ett allsidigt forsknings- och utvecklingsprojekt.
- Alla som undervisar i matematik, vare sig de ser sig själva som matematiklärare eller ej, måste ha en professionell attityd till uppgiften.

- Matematiklärarna vid en skola eller högskola måste kunna få fungera som grupp inom skolan eller högskolan, utan att därför isolera sig från övriga lärargrupper.
- På varje skola bör det finnas en eller flera lärare som ser som sin primära uppgift att vara lärare i matematik.
- Man bör pröva att ha ettämnslärare i matematik i skolan, i första hand i gymnasieskolan.
- Det borde finnas lärare (lektorer) i gymnasieskolan med erfarenhet av forskning i matematik eller matematikdidaktik.
- I den nya lärarutbildningen bör blivande grundskollärare i matematik få lära sig mer matematik och mera matematikdidaktik än man gör idag.
- Alla som kan komma att undervisa i matematik i framtiden (även om de inte formellt skall bli matematiklärare) bör i lärarutbildningen läsa både matematikdidaktik och ämneskurser i matematik.
- Gymnasielärare i matematik bör få en lika gedigen utbildning som i övriga nordiska länder.
- Möjligheterna att anordna en mer organiserad utbildning av gymnasielektorer i matematik bör prövas.
- Möjligheterna till ämnesmässig fördjupning och matematikdidaktisk fortbildning måste bli bättre än de är idag. Detta bör inte bara gälla för de lärare som formellt är "matematiklärare" utan kanske i ännu högre grad alla dem som med en annan basutbildning också undervisar i matematik.
- Alla högskolelärare bör ges möjligheter till matematikdidaktisk utbildning och fortbildning.
- Det samarbete och den samverkan mellan lärare i högskola och i gymnasieskola som i dag finns på olika håll bör byggas ut till hela landet. Högskolelärare i matematik bör besöka gymnasieskolor och gymnasielärare besöka högskolor för att auskultera och diskutera matematikundervisningen.

I I. De yttre ramarna för matematikutbildningen

Matematikens ställning i gymnasieskolan

Ett viktigt styrdokument är läroplanen för gymnasieskolan. I den bestäms vilka matematikkurser som skall finnas i de nationella programmen, och dessa kursers ställning som obligatoriska (för vissa program, eller vissa inriktningar) eller som valbara. Därigenom ges en ram inom vilken de enskilda skolorna och deras elever har möjlighet att göra vissa val. Utformningen av läroplanen innebär också ett (medvetet eller omedvetet) ställningstagande till de olika ämnenas betydelse.

Vi har tidigare pekat på att alla elever borde ges möjlighet att lära sig mera matematik än de gör idag.

Dagens utbildningssituation karakteriseras av två förhållanden:

1. Vi går mot ett system där en majoritet av ungdomarna inte avslutar sin utbildning med gymnasieskolan, utan planerar att fortsätta med högskolestudier mer eller mindre i direkt anslutning till gymnasiet.
2. Vi går samtidigt mot ett system där utbildning inte är något som man bara ägnar sig åt i ungdomen. Utbildning kommer att vara ett normalt inslag i livet för personer i alla åldrar. Man talar om livslångt lärande och återkommande utbildning.

I denna situation blir det naturligtvis allt viktigare att skolan ger sina elever de verktyg som de behöver för att ta del av den fortsatta utbildningen inom högskolan och eller i det livslånga lärandet. Ett metodämne som matematik är ett viktigt sådant verktyg. Därför anser vi generellt att matematikens ställning i gymnasieskolan och i läroplanen bör stärkas och inte försvagas.

Förslaget om gymnasieskolans framtida utveckling

Skolverket har på uppdrag av regeringen utarbetat ett förslag om gymnasieskolans framtida utveckling²⁶. Bedömningsgruppen har tidigare i en skrivelse till Högskoleverket (1998-12-29) gett sina synpunkter på dessa förslag vad avser ämnet matematik i gymnasieskolan.

Genom Skolverkets förslag får matematiken en svagare ställning (i relation till övriga ämnen) på NV- och SP-programmen.

Huvudsyftet för NV-programmet är enligt programbeskrivningen att förbereda för fortsatta studier i teknik och naturvetenskap. I sammanhanget kan

²⁶ Skolverket. *Redovisning av regeringens uppdrag 1998-03-12 angående gymnasieskolans utveckling* – U98/1135/S. Stockholm (1998)

också konstateras att 88 procent av eleverna i avgångsklassen 1997/98 på Naturvetenskapsprogrammet svarade ja på frågan om de har planer på att börja studier vid högskola eller universitet inom de närmaste tre åren, 10 procent svarade att de inte hade bestämt sig och bara två procent svarade nej. Bland dem som läste på Samhällsvetenskapsprogrammet svarade 73 procent ja, 22 procent hade ej bestämt sig och 6 procent svarade nej²⁷.

Man måste mot denna bakgrund fråga sig om det är motiverat att, som man gör i Skolverkets förslag, tona ner ett viktigt metodämne som matematik på dessa program, speciellt i ett läge då det redan finns klara indikationer på att många studenter har bristande förkunskaper i ämnet. I vår tidigare skrivelse har vi mera i detalj beskrivit vilka effekter den föreslagna förändringen kan komma att få för de elever som söker dig till dessa två gymnasieprogram.

Våra ställningstaganden till Skolverkets förslag utgår från strukturen med *inriktningar* innehållande vissa obligatoriska kurser med en viss profil och därutöver valbara kurser. Man kan naturligtvis också tänka sig lösningar med en betydligt större valfrihet för de elever som går på NV- och SP- programmen, och kanske också, på det nya tekniska programmet. Det ingår dock inte i vårt uppdrag att mera förutsättningslöst diskutera gymnasieskolans struktur. Här nöjer vi oss med att konstatera att vi anser att Ma D bör vara obligatorisk på NV-programmet och Teknikprogrammet. Vidare bör Ma C vara obligatorisk på vissa inriktningar i SP-programmet även i fortsättningen (förutsatt den organisatoriska lösning som valts i Skolverkets förslag till ny utformning av gymnasieskolan).

Vi menar också att de aktuella kurserna måste ges resurser och utrymme i form av undervisningstid etc. så att de blir rimliga att läsa för de berörda eleverna, vilket inte alltid är fallet idag (se nedan).

Inriktning mot matematik/data

I vår skrivelse om Skolverkets förslag kunde vi också konstatera att det inte i något av programmen fanns en inriktning svarande mot det kunskapsområde som är det mest expansiva i dagens samhälle: Datavetenskap.

Den tekniska utvecklingen med persondatorer, internet osv. – en utveckling som vi inte på något sätt har sett slutet på – har inneburit och kommer i ännu högre grad att innebära ett förändrat sätt att arbeta inom många samhällssektorer. Helt nya branscher och verksamheter kommer också att utvecklas. Det ena området efter det andra uppstår och utvecklas genom att informationsteknik kombineras med i stort sett alla typer av verksamhet och kunskaper.

För att möta denna utveckling krävs det naturligtvis fler specialister inom dataområdet. Men många fler människor än blivande specialister kommer att

²⁷ Källa SCB.

efterfråga kunskaper i de metodämnen som är grunden för utvecklingen. Sådana kunskaper bör kunna ges redan i gymnasieskolan. Det gäller grundläggande kurser i datavetenskap i vid mening, men också i matematik med speciell inriktning mot tillämpning inom dataområdet.

Samtidigt finns det många högskoleutbildningar med inriktning mot datavetenskap och tillämpad matematik utan direkt koppling till naturvetenskap eller traditionell teknik. Förkunskapskraven till dessa är i allmänhet Ma D eller Ma E. Det finns också en omfattande utbildning inom systemvetenskap vid samhällsvetenskaplig fakultet med förkunskapskrav Ma C.

Mot denna bakgrund föreslår bedömningsgruppen att det skall finnas *en matematik/data-inriktning* i gymnasieskolan, avsedd för

- den som vill gå vidare från gymnasieskolan till arbeten med IT-inriktning;
- den som vill fortsätta sin utbildning vid universitet och högskolor inom matematik/dataområdet;
- den som siktar mot annan verksamhet men vill ha en bas inom detta metodområde.

Inriktningen skall inte bara vara reserverad för dem som går Naturvetenskapsprogrammet eller Teknikprogrammet. En Matematik/data-inriktning bör också vara en profileringsmöjlighet för dem som går Samhällsvetenskapsprogrammet.

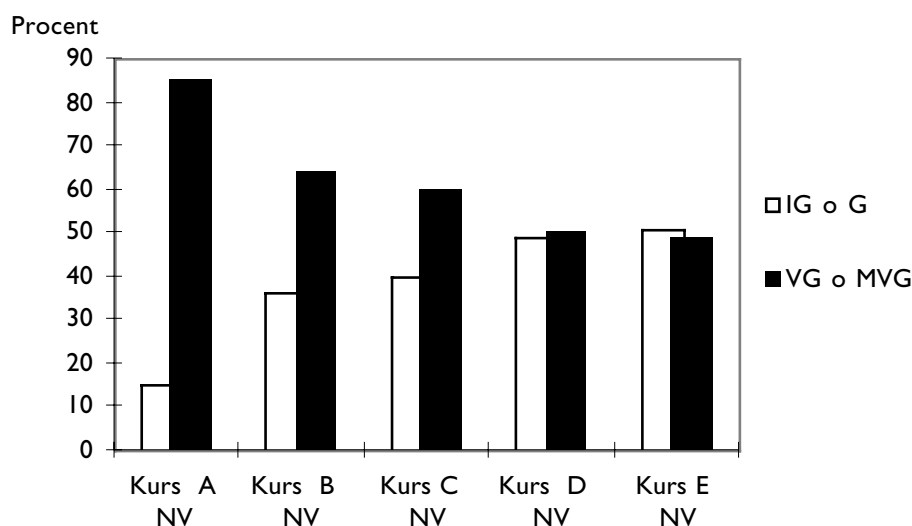
Gymnasieskolans kursprogram i matematik

De sammanlagt fem kurser som finns på NV-programmet omfattar i dagens system sammanlagt 300 poäng fördelade på kurserna Ma A 110 poäng, Ma B 40 poäng, Ma C 50 poäng Ma D 40 poäng och Ma E 60 poäng. I förhållande till kursinnehållets omfång är denna fördelning inte realistisk. Den kurs som har det största poängtalet Ma A, innehåller för eleverna på NV-programmet det minsta delen nytt stoff. (Många elever klarar det nationella kursprovet för Ma A redan innan de börjat på kursen).

Svårighetsgraden på de olika kurserna i matematik för de elever som läser på NV-programmet varierar också. Ett sätt att mäta detta är att se på avgångsbetygen. Diagram 2 visas den procentuella fördelningen på de olika kurserna mellan antalet elever med betyget IG och G å ena sidan och antalet studenter som fått VG och MVG å den andra. Som synes kan de fem kurserna fördelas på tre grupper:

På kurs Ma A har 85 procent av NV-eleverna fått VG eller MVG. På kurserna Ma B och Ma C ligger motsvarande siffra på något över 60 procent och för kurserna Ma D och Ma E på 50 procent.

Diagram 2. Elever med slutbetyg från NV-programmet i gymnasieskolan våren 1997. Betygsfördelningen för de fem matematikkurserna.



Resultaten tyder på att fördelningen av poängen och studietiden på de olika kurserna borde ändras. De diagnostiska proven visar också att de studenter som idag kommer till universitet och högskolor är säkrare på att lösa ”enkla” uppgifter inom matematikområden som finns i grundskolan och på kurs Ma A i gymnasieskolan än man är på att lösa uppgifter som av högskolelärare bedöms vara lika lätta och som ingår i kurserna Ma B – Ma E. Mycket talar för att detta beror på att undervisningstiden på dessa senare kurser är för kort. Speciellt kurserna Ma C och Ma D är omfattande och innehåller grundläggande kunskaper inom flera av de delar av matematiken som är viktiga som bas för fortsatt utbildning vid universitet och högskolor.

Fördelningen på de olika kurserna av den totala undervisningstiden för matematik på NV-programmet bör alltså ändras. En optimal användning borde leda till att betygsfördelningarna blir mer lika varandra på samtliga kurser (eller åtminstone på de fyra obligatoriska kurserna).

Mot bakgrund av detta är det förslag till ändrad poängsättning som finns i Skolverkets förslag till ny organisation ett steg i rätt riktning. Ökningarna av poängen på Ma C och Ma D är angelägna och kan väntas medföra att utbildningsresultaten förbättras på dessa kurser, vilket också kan få positiva effekter på de kunskaper som de nya studenterna har när de kommer till högskolan. En förutsättning är naturligtvis att ändringen av poängsättningen också får genomslag i fördelningen av undervisningstiden och den tid som eleverna kan avsätta för självstudier på de olika kurserna.

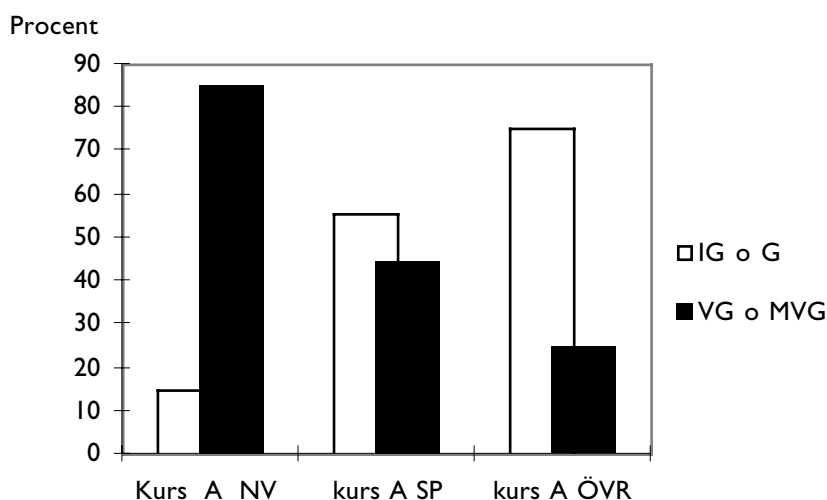
Ett liknande resonemang som ovanstående kan föras för SP-programmet, där 45 procent av eleverna har betyget VG eller MVG på Ma A mot bara 30 procent på Ma C. Som en allmän princip föreslår vi därför att fördelningen av poängtalet på gymnasieskolans matematikkurser på NV-, SP-programmen och det nya Teknikprogrammet bör motsvara fördelningen av den arbetsinsats som

kurserna kräver av eleverna. De resurser som avsätts i form av lärartid och elevtid bör också motsvara poängtalet.

Kursen Matematik A

Kursen Matematik A är idag gemensam för alla nationella program inom gymnasieskolan. Betygsfördelningen på de olika programmen varierar kraftigt. (se diagram 3)

Diagram 3: Elever med slutbetyg från gymnasieskolan vt 1997. Betygsfördelningen på kursen Matematik A för tre grupper: NV-programmets elever, SP-programmets elever och eleverna på övriga program.



Det framgår av Bengt Johanssons rapport²⁸ att dagens kurs Ma A inte passar för de elever som har goda kunskaper i grundskolans matematikkurs och som avser att läsa mera matematik i gymnasieskolan. Detta gäller för de allra flesta av dagens elever på NV-programmet (och också för en del av dem som går SP-programmet). Alltför lång tid får användas till i stort sett en repetition av grundskolans kurs, vilket för de flesta inte ger något större kunskapsmässigt utbyte. Lika lite som det är lämpligt att man går vidare till nästa matematikområde med för svaga kunskaper, lika lite är det lämpligt att man stannar för länge inom ett område innan man går vidare. Det senare gör att många elever tycker att kursen Ma A är tråkig och meningslös. Att engagemanget ändå kan hållas uppe beror enligt vissa lärare på att betyget MVG hägrar. Det ger idag stor utdelning i poäng – t.o.m. mer – än samma betyg på kurserna Ma D och Ma E sammantagna.

De nya poängtal som Skolverket föreslår borde som redan nämnts medföra att den tid som NV-eleverna behöver ägna sig åt Ma A blir mindre, och att den ”insparade” tiden kommer att användas på de andra kurserna i stället. Det blir i så fall en bättre fördelning än dagens.

²⁸ Bengt Johansson. *Förkunskapsproblem i matematik?* Skolverket. Stockholm. (1998).

En annan fråga gäller om kursen Ma A skall vara identisk på samtliga program i gymnasieskolan, eller om det skall finnas två (eller flera) olika kurser i matematik, som ibland föreslagits. Det skulle då kunna vara en viss kurs för de program som tidigare kallades studieförberedande, och en annan kurs för övriga program. Mot bakgrund av de skillnader i utbildningsresultaten på kurs Ma A som finns idag för elever på olika program menar vi att det finns starka skäl för en sådan uppdelning på flera programspecifika kurser. En förutsättning är naturligtvis att man inte skapar några återvändsgränder. Det behövs därför tilläggskurser för den som inte gått NV- eller SP-programmet eller Teknikprogrammet men som vill komplettera matematikkunskaperna till en nivå som svarar mot nuvarande kurser Ma B, Ma C, Ma D eller Ma E.

Kursen Matematik E

För NV-elever sönderfaller matematiken i inte mindre än fem kurser. Visserligen bygger de på varandra men varje kurs upplevs som avslutad med egen betygssättning. Det gör att utrymmet för fördjupning och syntes i inläringen blir eftersatt. För den majoritet av eleverna på NV-programmet som avser att fortsätta med matematikstudier vid universitet eller högskola är det vidare tveksamt om dagens utformning av kursen Ma E är den bästa tänkbara.

Ett sätt skulle kunna vara att låta den sista matematikkursen Ma E i högre grad än idag utgöra en syntes av de tidigare kurserna, där man samlar upp och bearbetar det som man tidigare lärt sig.

Det finns all anledning att göra en översyn av innehållet i Kurs E med särskild hänsyn till den kompetens som krävs vid fortsatta högskolestudier i matematik. I sammanhanget bör också framhållas den genomgång av önskvärda räknekunskaper som tagits fram inom ADM-projektet²⁹. Vi föreslår att en sådan översyn görs i nära samråd med universitet och högskolor.

Matematikkurser med annat innehåll

Det nationella kursutbudet i matematik på gymnasienivå är traditionellt. Vi menar inte att det tar upp matematikområden som inte är värda att kunna, men det finns också andra matematikområden som för vissa elever skulle kunna vara lämpliga alternativ till de nuvarande kurserna. Det saknas t. ex idag kurser som är mer direkt inriktade mot tillämpningar inom IT-området. Vi menar att man bör utveckla en gymnasiekurs i *diskret matematik*. En sådan kan vara av speciellt värde för de elever som siktar mot det växande utbudet av högskoleutbildningar med större eller mindre datavetenskapliga inslag. En sådan kurs kan mycket väl utformas så att den bygger enbart på de kunskaper som fås på Ma C (eventuellt på Ma B).

Detta bör dock bara vara en början. Man kan finna ytterligare matematikkurser med innehåll som kan vara alternativ till det i dag gängse kursutbudet.

²⁹ Lars-Eric Björk & Hans Brolin. *Matematik Från gymnasieskolans NV-program till högskolan. En rapport från ADM-projektet*. Uppsala Universitet, Institutionen för lärarutbildning Uppsala (1998).

Därför bör man successivt pröva införandet matematikkurser i gymnasieskolan med delvis annat innehåll än de nuvarande.

Utbildningsorganisation och kursplaner vid universitet och högskolor

Varje universitet och högskola avgör på egen hand hur kursutbudet i matematik skall utformas. På många håll pågår ett arbete med att anpassa kursstrukturen och kursinnehållen till de förändringar som gjorts i gymnasieskolans utbildning, och också till de reella förkunskaper som de nya studenterna har. Man lägger ner mer tid än tidigare på repetitions- och introduktionskurser för de nya studenterna.

De undersökningar som vi gjort av studieresultaten för de studenter som idag kommer från den nya gymnasieskolan tyder på att de flesta av dem som exempelvis har betyget G på kurs Ma D kan väntas få stora svårigheter när de börjar universitetsstudier i matematik, medan däremot de som har MVG har små problem med den uppläggning som utbildningen har idag. Spridningen i studenternas förkunskaper är alltså stor idag. Det riskerar att bli ännu större när den tekniska högskoleutbildningen enligt planerna byggs ut ytterligare.

Denna situation kan tacklas från två håll. Ett sätt är att de elever i gymnasieskolan, som kan väntas få svårigheter i högskolestudierna, får längre tid på sig i sina matematikstudier (i skolan och/eller i form av hemarbete) och därigenom får bättre förkunskaper än idag när de kommer till högskolestudierna. Detta kan bara ske på lång sikt och förutsätter också, enligt vår åsikt, att systemet signalerar att det är viktigt med goda kunskaper i matematik för den som skall fortsätta med studier inom teknik eller naturvetenskap.

Ett annat sätt, som under alla förhållanden måste väljas på kortare sikt, är att ge de studenter som har svaga förkunskaper längre tid till högskolestudierna i matematik. Bedömningsgruppen menar därför att högskolorna bör överväga att differentiera studenterna inom ett och samma utbildningsalternativ på grupper i olika studietakt eller med olika undervisningsinsats. Det är dock tveksamt om detta räcker som åtgärd för att hos alla studenter överbrygga gapet mellan förkunskaperna och universitetsstudierna. Det kan behövas mer radikala lösningar.

Överbrygningskurser

Man kan också tänka sig olika former av mellanutbildningar mellan gymnasieskolan och högskolenivån. Idag finns det olika former av basår såväl vid universitet och högskolor som inom Komvux. Det är ettåriga utbildningar som förbereder studerande som inte gått NV-programmet för fortsatta studier inom bl.a. teknik och naturvetenskap.³⁰ Man kan se hela basåret som en ettårig

³⁰ Läsåret 1996/97 deltog ca 3500 studenter i basårutbildning vid högskola eller universitet. Dessutom finns de ca 5000 studerande som inom ramen för kunskapslyftet läser basårskurser inom KOMVUX.

inledande kurs för dem som saknar tillräckliga förkunskaper. Det är naturligtvis också möjligt att tänka på ett liknande sätt för studenter som gått Naturvetenskapsprogrammet, men som visar sig ha så svaga förkunskaper att de inte bedöms kunna följa med i den ordinarie undervisningen. Vi menar därför att systemet måste tillåta att även de som tidigare läst på NV-programmet men som har otillräckliga förkunskaper skall kunna få rätt att gå en introduktions-termin eller en på annat sätt anpassad studiegång inom högskolan, innan de börjar reguljära högskolestudier inom teknik eller naturvetenskap.

Vi är medvetna om att en sådan lösning kan innebära en del problem av i första hand administrativ karaktär, beträffande antagning osv. Dessa problem är dock inte oöverstigliga.

Kursutbudet i övrigt

På längre sikt finns det anledning att se över uppläggningsen av de traditionella kurserna i matematik. De inledande kurserna innehåller på de allra flesta håll analys i en och flera variabler samt linjär algebra. Det bör nog ifrågasättas om inte andra delar av matematiken också borde finnas med i en grundläggande högskolekurs i matematik

Urvalet till högre studier

Betygen har en stor betydelse

Ett förhållande som i utomordentligt hög grad påverkar studiemönstret i gymnasieskolan är att betyg ges på varje kurs man läser och att dessa betyg sedan används vid konkurrensen om platserna på universitetens och högskolornas utbildningar. Denna påverkan är i de flesta fall negativ.

Betygsgraderna är som bekant icke godkänd (IG), Godkänd (G), Väl godkänd (VG) och Mycket väl godkänd (MVG). Den elev som får IG har rätt att pröva för att få ett högre betyg. Den som har fått något av de övriga tre betygen har inte rätt att pröva för högre betyg under den tid hon/han är kvar i skolan. Därefter är det tillåtet att efter gymnasiestudiernas slut höja betyget genom omprov i någon skola eller vid Komvux.

Vid urvalet till högre studier beräknas meritpoängen på ett och samma sätt, oberoende av vilken utbildning man vill komma in på. Betyget G ger 10 poäng, VG 15 poäng och MVG 20 poäng. Betygen på alla kurser man läst i gymnasieskolan vägs samman med en vikt som motsvarar kursernas poängtal i studieplanen.

Budskapet till eleverna är alltså: Välj, inom de ramar som finns, de kurser som är lättast att få högt betyg på, oberoende av om de har något samband med den högskoleutbildning som du siktar mot.

Det finns, så vitt vi kunnat konstatera, ännu så länge ingen systematisk undersökning av hur reglerna påverkar elevernas val och handlande i övrigt i

gymnasieskolan. I anslutning till vårt arbete har vi dock fått vittnesbörd om att de aktuella reglerna i många fall uppmuntrar till ett taktiskt handlande. I första hand har vi fått exempel på hur detta kan drabba utbildningen på matematikkurserna.

Matematikkurserna, särskilt de senare, uppfattas av många elever som tunga. Det händer därför att man istället för att satsa på ett överbetyg på exempelvis Ma D, väljer att lägga ner sin energi på något annat ämne där chansen till bra betyg upplevs som större.

Då Ma A har högst poängtal bland matematikkurserna är den ur antagnings-synpunkt den viktigaste. Ett MVG på Ma A ger i dagens system bättre ”utdelning” i antagningen än samma betyg på kurserna Ma D och Ma E sammantagna. Det kan medföra att elever inte vill lämna Ma A och gå vidare till efterföljande kurser innan man är absolut säker på att man kan få högsta betyget. Det kan innebära att vissa elever vill utnyttja en stor del av de 110 timmar som är avsatta trots att goda kunskaper (om än inte alltid kunskaper som ger alla det högsta betyget) kan uppnås på betydligt kortare tid. Sett ur hela matematikblockets perspektiv är en mer optimal användning av tiden att man relativt snabbt går vidare till de delar av gymnasiekursen som är svårare.

Matematik är det ämne som har flest kurser i gymnasieskolan – sammanlagt 5 kurser för eleverna på NV-programmet. I princip sätter man för varje kurs betyg på de moment som ingår i just den kursen. Det viktigaste för eleven är då att behärska just denna del vid provtillfället. Däremot ges inga poäng för att man kan kombinera matematikkunskaper från flera kurser i gymnasieskolan. Detta är ur inlärningssynpunkt en nackdel. En del i det som vi kallat ”matematisk mognad” innebär just att man kan kombinera metoder och resultat från olika matematikområden för att lösa mer sammansatta uppgifter. Eftersom betygen på de enskilda kurserna har så stor betydelse för dem som vill komma in på en hårt spärrad högskoleutbildning är risken stor att man får en mer ytligt och på den enskilda kursens innehåll koncentrerad inlärning.

En generell åtgärd som skulle öka motiven bland de elever som tänker läsa naturvetenskap och teknik att ägna mer tid och engagemang åt relevanta ämnen i skolan är att ge betygen i sådana ämnen en speciell betydelse vid antagningen. Vid urvalet till högre studier kan man ge varje kurs som den sökande läst i gymnasieskolan en vikt i förhållande till den betydelse de har för den utbildning som hon/han söker.

Pröva andra urvalsmetoder

Ett annat sätt att komma tillrätta med betygsantagningens negativa effekter på gymnasiestudierna är att anta studenter efter andra kriterier än nivån på gymnasiebetygen. Vissa platser på en utbildning kan exempelvis fördelas efter resultatet på ett intagningsprov, som skulle kunna innehålla matematikuppgifter av mera sammansatt karaktär (fortfarande baserade på gymnasieskolans kurser). Man kan också tänka sig många andra sätt att helt eller delvis välja ut de studenter som skall ges plats på olika utbildningar. Det tar emellertid tid att

utveckla sådana tester eller prov. Bedömningsgruppen föreslår att man på lång sikt prövar andra urvalsmetoder till högskoleutbildningarna, antingen som ett komplement till eller som en ersättning för nuvarande metoder (betyg och högskoleprov).

Studiemedelsreglerna

Reglerna för studiemedel, så som de idag är utformade, innebär för många studenter ett hinder för en individuellt anpassad studietakt. Samhällets uttalade intresse och behov av fler högskoleutbildade med teknisk eller naturvetenskaplig inriktning tillsammans med bristen på studenter med tillräckliga förkunskaper bör emellertid väga tungt. Vi föreslår därför att reglerna för att erhålla studiemedel utformas så att de inte utgör hinder för studenter med otillräckliga förkunskaper att följa en långsammare studietakt.

Forskning och utvärdering

Ett förbättringsarbete av det slag som har skisserat i det föregående måste stödjas av forskning och utvärdering.

Forskning i matematikdidaktik

Den matematikdidaktiska forskningen i landet är eftersatt. Det finns många områden där sådan forskning är viktig för att man skall kunna förstå situationen när det gäller matematikundervisningen och dess resultat. Det kan gälla forskning om läromedel och deras effekter, om kursplaner och kursplaneutveckling osv.

Den matematikdidaktiska forskningen har traditionellt förekommit i anslutning till lärarutbildningsinstitutionerna. Under de senaste åren har man dock startat matematikdidaktisk forskning vid vissa ämnesinstitutioner. Till denna har bl.a. rekryterats personer med en bakgrund i matematisk "traditionell" forskning. Därigenom kan matematikdidaktiken komma att få en bredare profil än tidigare. Samtidigt kan detta också komma att förstärka den "didaktiska medvetenheten" vid universitetsinstitutionerna. Trots detta är forskningen inom detta område eftersatt i Sverige. Det finns t.ex. idag ingen professur i matematikdidaktik i landet. Sådana finns däremot i samtliga av våra nordiska grannländer.

Forskningen i matematikdidaktik bör därför byggas ut så att vi kommer minst i nivå med situationen i andra jämförbara länder. Den bör ägnas alla utbildningsstadier och inte minst högskolenivån.

Behovet av utvärdering

Det är viktigt att matematikundervisningen utvärderas. Det behövs underlag för detta. De nationella proven bör därför utvecklas. De bör vara obligatoriska och ges på en gemensam skrivdag och ges en utformning så att de ger en bild

av elevernas kunskaper både vad avser basfärdigheter (metodkunskap) tillämpningar och begreppsförståelse. Resultaten bör analyseras (ev med inslag av externa bedömare) och återföras till skolorna.

1994/95 genomfördes som redan nämnts på Universitetskanslerns initiativ en utvärdering av den grundläggande utbildningen i matematik vid svenska universitet och högskolor.³¹ I utvärderingen engagerades en extern expertgrupp till stor del bestående av utländska matematiker och matematikdidaktiker. Syftet med utvärderingen var att få en uppfattning om nivån på den svenska högskoleutbildningen i matematik i ett internationellt perspektiv och att belysa matematikutbildningens relevans i förhållande till samhällets behov av kompetens inom matematikområdet. Utvärderingen rönt stor uppmärksamhet och blev ett värdefullt incitament i universitetsinstitutionernas utvecklings- och kvalitetsarbete.

Såvitt vi har kunnat finna har inga sådana utvärderingar gjorts av den svenska skolutbildningen i matematik (eller i något annat skolämne). Vi föreslår att en liknande extern utvärdering görs av matematikundervisningen i den svenska skolan (både grundskola och gymnasieskola).

Sammanfattning

- Matematikens ställning i gymnasieskolan bör stärkas och inte försvagas.
- Kursen Ma D bör vara obligatorisk på NV-programmet och Teknikprogrammet. Kursen och Ma C bör vara obligatorisk på vissa inriktningar i SP-programmet även i fortsättningen (förutsatt den organisatoriska lösning som valts i Skolverkets förslag till ny utformning av gymnasieskolan).
- Det bör införas en matematik/data-inriktning i gymnasieskolan. Den skall inte bara vara reserverad för dem som går Naturvetenskapsprogrammet eller Teknikprogrammet. Den bör också vara en profileringsmöjlighet för dem som går Samhällsvetenskapsprogrammet.
- Fördelningen av poängtalet på matematikkurserna på NV- och SP-programmen måste motsvara fördelningen av den arbetsinsats som kurserna kräver av eleverna. De resurser som avsätts i form av lärartid och elevtid bör motsvara poängtalet.
- Den för alla program gemensamma kursen i matematik (Ma A) bör ersättas av programspecifika kurser i matematik. Samtidigt skapas tilläggskurser för den som inte gått NV- SP- eller Teknikprogrammet men vill komplettera matematikkunskaperna till samma nivå som nuvarande Ma B, Ma C, Ma D eller Ma E.
- Innehållet och utformningen av kurs Ma E bör ses över i nära samråd med högskolorna. Man bör pröva om den kan få ett innehåll som utveck-

³¹ *Nationell utvärdering av grundutbildningen i matematik*. Universitetskanslern. Kanslersämbetets rapport 1995.5.

lar det som vi i denna rapport kallar matematisk mognad och också blir en syntes av tidigare matematikkurser i gymnasieskolan.

- Man bör också successivt pröva införandet matematikkurser i gymnasieskolan med delvis annat innehåll än de nuvarande. Som ett första steg bör en kurs i diskret matematik införas – i första hand för den föreslagna inriktningarna mot matematik-data-området.
- Systemet måste tillåta att även de som tidigare läst på NV-programmet men som har otillräckliga förkunskaper skall kunna få rätt att gå en introduktionstermin eller en på annat sätt anpassad studiegång inom högskolan, innan de börjar reguljära högskolestudier inom teknik eller naturvetenskap.
- Högskolorna bör överväga att differentiera studenterna inom ett och samma utbildningsalternativ på grupper i olika studietakt eller med olika undervisningsinsats.
- Utformningen och innehållet i de grundläggande kurserna i matematik på olika högskoleutbildningar bör ses över.
- Varje matematikkurs som den sökande läst bör vid urvalet till högskolestudier ges en vikt som svarar mot dels den betydelse kursen har för den utbildning man söker, dels kursens svårighetsgrad.
- På lång sikt bör högskolorna få pröva andra urvalsmetoder till utbildningarna, antingen som ett komplement till eller som en ersättning för de nuvarande metoderna (betyg och högskoleprov).
- Reglerna för att erhålla studiemedel måste utformas så att de inte utgör hinder för studenter med otillräckliga förkunskaper till att följa en långsammare studietakt.
- Den matematikdidaktiska forskningen i Sverige bör utvecklas så att vi kommer minst i nivå med situationen i andra jämförbara länder.
- De nationella proven i matematik bör utvecklas så att de bättre än nu kan användas i en utvärdering av matematikutbildningens resultat.
- En extern utvärdering, med till stor del utländska utvärderare, bör göras av matematikundervisningen i den svenska skolan (både grundskola och gymnasieskola).

Bilaga I

Regeringens uppdrag till Högskoleverket

Regeringsbeslutet finns endast i den tryckta versionen



Utbildningsdepartementet

Bilaga till regeringsbeslut den 19 mars 1998

*Universitets- och högskoleenheten
Göran Andersson
Telefon 08-405 18 31*

Uppdrag till Högskoleverket att utreda och analysera högskolestudenters förkunskaper i matematik

Bakgrund

Goda förkunskaper i ämnet matematik är en förutsättning för att klara studierna vid högskolornas tekniska och naturvetenskapliga utbildningar. Vid ett antal universitet och högskolor anser emellertid ledning och lärare att studenternas förkunskaper i matematik är alltför dåliga för att dessa på ett tillfredsställande sätt skall kunna följa och klara av utbildningarna.

En betydligt mer positiv bild av svenska gymnasieelevers kunskaper i matematik finns i den internationella jämförande utvärderingen, Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) som redovisades den 24 februari 1998. I utvärderingen jämförs gymnasieelevers slutkunskaper i bl.a. matematik och naturvetenskap i 21 länder. De svenska gymnasisterna fick de bästa resultaten i undersökningen. Slutkunskaperna i matematik på de tekniska och naturvetenskapliga inriktningarna är inte fullt lika goda men Sverige ligger i paritet med det internationella genomsnittet och endast två länder är signifikant bättre än Sverige. Inom ramen för TIMSS presenterades en rapport i november 1996. I den görs motsvarande jämförelse av kunskaperna i matematik hos trettonåringar. Enligt rapporten intar Sverige en mittenplats bland de 26 jämförda länderna.

I OECD-rapporten "Education policy analysis" presenterades i december 1997 resultaten av en undersökning av praktisk problemlösningsförmåga hos vuxna. Tillämpad matematik ingår där som ett moment. Av rapporten framgår att Sverige har det bästa resultatet oavsett utbildningsbakgrund.

Det pågår för närvarande flera studier som på olika sätt skall belysa studenternas förkunskaper i matematik. Som exempel kan nämnas följande:

- Vid Chalmers tekniska högskola AB bedrivs en studie av studenternas förkunskaper i matematik och en rapport planeras till våren.

- På institutionen för pedagogik vid Göteborgs universitet har sedan 1940-talet bedrivits en longitudinell studie av kunskaperna hos elever i grundskolans årskurs 6, vilken ger möjlighet till fortlöpande jämförelser.

Regeringen har under de senaste åren vidtagit en rad åtgärder för att utveckla och stärka undervisningen i såväl matematik som teknik och naturvetenskap på alla nivåer i utbildningssystemet. Som exempel på sådana åtgärder kan nämnas:

- det s.k. NOT-projektet (Naturvetenskap och Teknik) som Högskoleverket och Skolverket sedan 1993 bedriver på regeringens uppdrag; en av grundtankarna i projektet är att de naturvetenskapliga utbildningarnas innehåll och uppläggning i grund- och gymnasieskolan måste ändras för att högskolans rekrytering av studenter i allmänhet och kvinnor i synnerhet, till tekniska och naturvetenskapliga utbildningar skall öka,

- regeringens uppdrag till Linköpings universitet den 23 maj 1996 att i samverkan med andra universitet och högskolor, utveckla och förnya högskoleingenjör- och civilingenjörutbildningarna bl.a. genom utveckling av nya pedagogiska metoder i undervisningen,

- tillsättningen av Lärarutbildningskommittén (dir. 1997:54) som bl.a. har i uppdrag att överväga behovet av ytterligare insatser för att öka rekryteringen till lärarutbildningar i ämnena matematik, naturvetenskap och teknik.

Som redan nämnts anser ledning och lärare vid ett antal universitet och högskolor anser att ungdomars förkunskaper i matematik är alltför dåliga för att de på ett tillfredsställande sätt skall kunna följa och klara av utbildningarna. Sålunda har Linköpings universitet i en skrivelse till Utbildningsdepartementet (dnr U97/4487/UH) den 4 november 1997 anfört att resultatet på diagnostiska prov i matematik för högskolenybjörjare har blivit markant sämre sedan början av 1990-talet. I den offentliga debatten har likartade synpunkter framförts av lärare vid Uppsala universitet, Chalmers tekniska högskola AB, Luleå tekniska universitet och Lunds universitet.

I Kanslerämbetets rapport Nationell utvärdering av grundutbildningen i matematik (1995:5) framför en utredare att en ofta återkommande synpunkt inom matematikinstitutionerna - från lärare men också i viss mån från studenter - är de brister som man anser att gymnasieskolan har när det gäller att ge studenterna goda förutsättningar för akademiska studier i matematik. Utredaren menar att kritiken är av sådan tyngd och frekvens att det inte går att avfärda den som sedvanlig kritik. De åtgärder som utredaren föreslår går bl.a. ut på att såväl högskola som gymnasieskola måste skaffa sig bättre kunskap om och förståelse för varandras situation och förutsättningar. Det påpekas också

att gymnasieläroterutbildningen i matematik vid en internationell jämförelse är både elementär och grund, varför dess innehåll och nivå bör diskuteras.

Regeringen uppdrog den 18 april 1996 åt Högskoleverket att utvärdera utbildningen inom vissa nybörjarämnena inom högskolan, däribland matematik. En delfråga om studenters förkunskaper i matematik ingick i det uppdraget. Av rapporten "Kvalitet och förändring" (1997:8), i vilken uppdraget redovisas, framgår bl.a. följande:

- Uppsala universitet menar att studenternas förkunskaper i matematik försämrats.
- Umeå universitet påpekar att matematikundervisningen vid dagens gymnasieskola är mer splittrad än tidigare eftersom en större valfrihet har införts i ämnet. Detta gör att studenterna har en mindre homogen kunskapsbas när de kommer till högskolan.

Det finns således indikationer på bristande överensstämmelse mellan gymnasieskolans utbildning och högskolans krav vad gäller matematikämnet.

Uppdraget

Högskoleverket bör ges i uppdrag att, efter samråd med Statens skolverk utreda och analysera:

- Om förkunskaperna i matematik har förändrats hos studenterna vid universitetens och högskolornas tekniska och naturvetenskapliga utbildningar (i t.ex. ett 20-års perspektiv), mot bakgrund av de förändringar som skett inom grund- och gymnasieskolan.
- Om högskolorna har förändrat sina krav på studenternas förkunskaper i matematik, och om så är fallet, på vilket sätt.
- Om de krav som högskolorna har på studenternas förkunskaper i matematik är ändamålsenliga, mot bakgrund av bl.a. förändringar i innehåll i undervisningen på såväl gymnasieskola som högskola.
- Vilka innehållsliga och pedagogiska åtgärder, inom såväl högskola som gymnasium, som bedöms verksamma för att underlätta övergången från gymnasieskolan till högskolans tekniska och naturvetenskapliga program vad avser ämnet matematik.

Högskoleverket bör i utredningsarbetet ta del av och sammanställa de forsknings-, utrednings- och utvärderingsarbeten som redan bedrivs på internationell, nationell, regional och lokal nivå, inom området.

Uppdraget skall redovisas i en slutrapport senast den 15 december 1998.

Bilaga 2

Johan Lithner. Matematikdidaktisk forskning
relaterad till övergången gymnasieskola –
högskola en översikt

Matematikdidaktisk forskning relaterad till övergången gymnasium - högskola en översikt

av Johan Lithner

1. Allmänt.

Trots att det finns relativt få matematikdidaktiska forskningsartiklar som direkt behandlar problemen beträffande övergången mellan gymnasium och högskola, är mängden av artiklar som på ett eller annat sätt är relevanta stor. Det innebär bland annat att det i denna sammanställning inte är möjligt att ge annat än några (förhoppningsvis centrala) exempel.

En av den samlade forskningens mer övergripande slutsatser kan enligt Niss (1998) formuleras: *“The astonishing complexity of mathematical learning. An individual student’s mathematical learning often takes place in immensely complex ways, along numerous strongly winding and frequently interrupted paths, across many different sorts of terrain. Many elements, albeit not necessarily their composition, are shared by large classes of students, whereas others are peculiar to the individual.”*

Som eget forskningsfält är matematikdidaktiken relativt ung, i synnerhet beträffande forskning om undervisning och inläring på gymnasie- och högskolenivå finns mycket kvar att göra och många centrala frågor där man saknar eller endast har partiella svar. Detta tillsammans med ovanstående citat medför att matematikdidaktisk forskning inte kan ge klara och enkla svar på hur de didaktiska problemen vid gymnasium, högskola, samt i övergången däremellan ska lösas. Det behövs förmodligen ett långsiktigt och tålmodigt arbete av både lärare, administratörer, studenter (med “studenter” menas här och nedan både studenter och elever), forskare och andra för att utveckla undervisningen. Även om utvecklingen går framåt tyder inget på att framstegen kommer att vara särskilt dramatiska.

En naturlig utgångspunkt, vilken styrks av forskningen, är att vissa av problemen (och åtgärdsförslagen) grundar sig i den *skillnad* som finns mellan matematikundervisningen i gymnasium respektive högskola, och vissa av problemen är *gemensamma*:

2. Skillnader mellan gymnasium och högskola.

Matematiska bevis och dess deduktiva logik har alltid vållat stora svårigheter för många studenter. Numera är bevisets roll kraftigt reducerat på gymnasienivå i Sverige och på många andra håll, man lägger istället alltmer vikt vid att förmedla mening och en känsla för matematiska idéer. En motsvarande förskjutning har även skett inom universitetsmatematiken men av betydligt mindre omfattning, och matematiska bevis är här fortfarande ett av de centrala momenten. Flera matematikdidaktiska forskare pekar på studenternas svårigheter att analysera, konstruera och rekonstruera bevis, och att många överhuvudtaget inte ser någon större poäng med matematiska bevis (t. ex. Balacheff 1988, Hanna och Jahnke 1996).

Ett annat, mer generellt, kvalitativt steg tas vid övergången till högskolan med avseende på en ökad abstraktionsnivå. Den matematiska abstraktionsnivån ökar i och för sig kontinuerligt från grundskolans årskurs 1 och uppåt, men betraktas av många som en avgörande skillnad mellan gymnasium och högskola (se t. ex. Tall

1991) Dessutom krävs det vid högskolan en betydligt större självständighet i studierarbetet, vilket många lärare menar är ett av huvudproblemen (Guzmán m. fl 1998).

3. Gemensamma problem.

Forskningen inom detta område är betydligt mer omfattande än inom (2) ovan. En möjlig hypotes är att detta är en följd av att de väsentliga problemen faktiskt är gemensamma. Det faktum att många av de studenter som är godkända vid gymnasiet blir underkända vid högskolan kan i huvudsak vara en följd av olika betygs- och examinationsformer, och inte av att högskolestudierna skulle vara kvalitativt anorlunda.

Ett av forskningens mer specifika resultat är enligt Niss (1998): *“The key role of domain specificity. For a student engaged in learning mathematics, the specific nature, content and range of a mathematical concept that he or she is acquiring or building up are, to a large part, determined by the set of specific domains in which that concept has been concretely exemplified and embedded for that particular student. [...] For example, even if students who are learning calculus or analysis are presented with full theoretical definitions [...], and even if it is explicitly stated in the textbook and by the teacher that the aim is to develop these concepts in a general form [...], students actual notions and concept images will be shaped, and limited, by the examples, problems, and tasks on which they are actually set to work.”* Ett kortfattat exempel är en stor grupp danska åk. 12 studenter som inte kunde identifiera ekvationen $z=0$ som ett plan, på grund av att den ytligt sett inte var skriven på den normala formen för plan $ax+by+cz=d$. Det finns även djupare aspekter av detta fenomen som t. ex. att elevers begreppsbilder (concept images, se Vinner 1991 och Tall 1992) kan skilja sig markant från begreppens definitioner (concept definitions). Eftersom högskolematematiken delvis är mer abstrakt än gymnasie matematiken, kan detta delvis kategoriseras under (2) ovan.

En allvarlig negativ konsekvens av alltför begränsade begrepps bilder verkar vara att studenterna inte klarar att handskas med begreppsmässigt utmanande frågeställningar av icke-rutinmässig karaktär, enligt Tall (1996): *“If the fundamental concepts of calculus [...] prove difficult to master, one solution is to focus on the symbolic routines of differentiation and integration. [...] The problem is that such routines becomes just that - routine - so that students begin to find it difficult to answer questions that are conceptually challenging. The teacher compensates by setting questions on examinations that students can answer and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion.”* I värsta fall kan detta även hindra studenter från att senare utveckla en djupare förståelse av begreppen (Hiebert och Carpenter, 1992).

Sociala och genderrelaterade faktorer är kopplade till studieresultat för matematikstudenter på alla nivåer, se t. ex. (Leder m.fl. 1996), liksom affektiva faktorer och motivation. Ett pågående projekt (Leder 1998) tyder bl a på att andelen studenter som fann nöje i matematik sjönk från 60% i skolan till 35% vid universiteten.

4. Några positiva resultat.

Även om inte forskningen (eller någon annan) är ens nära att fullständigt lösa problemen, så finns positiva resultat. Här finns inte utrymme för annat än några mycket kortfattat beskrivna exempel.

En ökad insikt i hur studenter lär, förstår och utvecklar tänkande kring komplicerade matematiska begrepp. Ett exempel är den av Dubinsky initierade APOS-teorin (Asiala m. fl. 1996): "*understanding a mathematical concept begins with manipulating previously constructed mental or physical objects to form actions ; actions are then interiorized to form processes which are then encapsulated to form objects. Objects can be de-encapsulated back to the processes from which they were formed. Finally, actions, processes and objects can be organized into schemas.*" Denna teori har även omsatts i praktisk undervisningsdesign.

Schoenfeld (1985, 1992) har studerat arbete med icke-rutinmässiga matematikproblem på gymnasie- och högskolenivå. Han delar in problemlösningens kompetens i fyra aspekter: Resources (baskunskaper), Heuristics (en slags "problemlösningens tumregler"), Control (övervakning och reflektion) samt Belief (inställning till vad matematik är). Schoenfeld har på ett mycket övertygande sätt visat att alla fyra aspekter har avgörande inverkan. Det visar sig vara långt ifrån trivialt, men inte omöjligt, att designa kurser som utvecklar dessa fyra aspekter.

Många menar att våra traditionella arbets- och studie former är förlegade. Trots att undervisningsformen på gymnasie- och högskolenivå väsentligen är oförändrad, genomförs många försök med nya varianter, se t. ex (Tucker 1995). T. ex. projekt- eller problembaserad undervisning, och smågruppsundervisning. En av de svenska föregångarna inom det senare området är Dunkels (1996).

En av orsakerna till att förändringarna inte varit mer omfattande är enligt Artigue (1998) att forskningen sällan visar på stora vinster via enkla förändringar: "*On the contrary, most research based designs require more engagement, expertise from teachers, and significant changes in practices* (Dubinsky m. fl. 1997)."

5. Referenser.

Artigue, M.: 1998, 'What can we learn from Didactic Research carried out at University Level', Pre-proceedings, ICMI Study Conference On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Singapore.

Asiala, M. et al.: 1996, A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 6, pp. 1-32.

Balacheff, N.: 1988, 'Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics', in D. Pimm (ed.), *Mathematics, teachers and children*, London: Hodder and Stoughton, pp. 216-235.

Dubinsky, E. et al.: 1997, 'Readings in Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics', MAA notes 44, The Mathematical Association of America.

Dunkels, A.: 1996, 'Contributions to Mathematical Knowledge and its Acquisition', Doctoral thesis, Luleå University, Sweden.

Guzmán, M. et al.: 1998, 'Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education', Documenta Mathematica, Extra volume, ICM 98, III.

Hanna, G. and Jahnke N.: 1996, 'Proof and Proving', in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 877-908.

Hiebert, J. and Carpenter, T.: 1992, 'Learning and Teaching With Understanding', in D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.

Leder, G.: 1998, 'Panel Discussion - Mass Education', Pre-proceedings, ICMI Study Conference On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Singapore.

Leder, G. et al.: 1996, 'Research and Intervention Programs in Mathematics education: A Gendered Issue', in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 945-986.

Niss, M.: 1998, 'Aspects of the nature and state of research in mathematics education', *Documenta Mathematica*, Extra volume, ICM 98, III.

Schoenfeld, A.: 1985, *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.: 1992, 'Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics', in D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 334-370.

Tall, D.: 1991, *Advanced mathematical thinking*. Kluwer.

Tall, D.: 1992, 'The transition to advanced mathematical thinking', in D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 495-511.

Tall, D.: 1996, 'Functions and calculus', in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 289-326.

Tucker, A.: 1995, 'Models that work. Case Studies in Effective Undergraduate Mathematics Programs', MAA notes 38, The Mathematical Association of America.

Vinner, S.: 1991, 'The role of definitions in the teaching and learning of mathematics', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 65-81.